HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi/matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

MATEMATIK

2. semester (omprøve)

7. august 1990, kl. 9.00-13.00

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.

Opgave 1. (Vægt 25%.)

I talrummet $\mathbf{R}^4$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Find en basis for underrummet $U = \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5, \underline{a}_6\}$.

b. Udvid den fundne basis for U til en basis for $\mathbf{R}^4$.

I det følgende tænkes $\mathbf{R}^4$ udstyret med det sædvanlige skalarprodukt.

c. Bestem ortogonalprojektionen af vektoren

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

på U.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2. (Vægt 20%.)

Der er givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ -a & 1+2a \end{pmatrix},$$

hvor a betegner et givet reelt tal.

a. Find samtlige egenværdier for $\underline{\underline{A}}$.

b. Find de værdier af a for hvilke $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar.

c. Gør rede for, at hvis $a = -\frac{2}{3}$, da findes en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$, så $\underline{\underline{SAS}}^{-1}$ er en diagonalmatrix, og find en sådan matrix $\underline{\underline{S}}$.

Opgave 3. (Vægt 5%.)

Der er givet permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Find fortegnet for σ.

b. Find permutationen σ^{-1}.

c. Angiv, hvorledes σ kan fås ved sammensætning af naboombytninger.

Opgave 4. (Vægt 15%.)

Lad funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = x(2 - x - 2y),$$

og sæt

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y \leq 2\}.$$

a. Skitser mængden A i xy-planen.

b. Udregn volumenet V af legemet under grafen for f over A.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5. (Vægt 25%.)

Lad funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2.$$

a. Bestem de 4 stationære punkter for f.
b. Udregn Hessematricen, og afgør hvilke af de stationære punkter, der er maksimums-, minimums- eller saddelpunkter.
c. Gør rede for, at f har en størsteværdi og en mindsteværdi i mængden

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3\},$$

og find disse værdier.

Opgave 6. (Vægt 10%.)

a. Find samtlige (komplekse) rødder i ligningen

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0.$$

b. Angiv modulus (modulen) og hovedargument for hver af rødderne.

SLUT