HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi/matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

MATEMATIK

2. semester

12. juni 1990, kl. 9.00-13.00

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.

Opgave 1. (Vægt 15%.)

I et tredimensionalt vektorrum V er der givet basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$. Vektorerne $\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3$ defineres ved

$$\underline{\tilde{a}}_1 = \underline{a}_1 - \underline{a}_2 + 2\underline{a}_3,$$
$$\underline{\tilde{a}}_2 = 3\underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 + 6\underline{a}_3,$$
$$\underline{\tilde{a}}_3 = 2\underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 + 5\underline{a}_3.$$

a. Gør rede for, at sættet $\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3$ udgør en basis i V, og angiv koordinattransformationsmatricen for overgang fra basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ til basen $(\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3)$.

b. Den lineære afbildning $f : V \to V$ repræsenteres i basen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Find den matrix $\underline{\underline{\tilde{A}}}$, der repræsenterer f med hensyn til basen $\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3$.

c. Gør rede for, ingen af matricerne $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ er diagonaliserbare.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2. (Vægt 15%.)

I det følgende tænkes $\mathbf{R}^4$ udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ er med hensyn til den naturlige basis i $\mathbf{R}^4$ givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Bestem en basis for kernen $K = \ker f$ for f.
b. Bestem en ortonormalbasis for $U = f(\mathbf{R}^4)$.
c. Bestem en ortonormalbasis for $U^{\perp}$.

Opgave 3. (Vægt 20%.)

En lineær afbildning $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a. Find samtlige egenværdier for f.
b. Undersøg, om der findes en basis for $\mathbf{R}^3$ bestående af egenvektorer for f og angiv i givet fald en sådan basis.

Talrummet $\mathbf{R}^3$ tænkes nu udstyret med det sædvanlige skalarprodukt.

c. Find ortogonalprojektionen af vektoren

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

på hvert af egenrummene for f.

Opgave 4. (Vægt 25%.)

Funktionen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ er givet ved

$$f(x, y) = 10x^2 + 5y^2 + 2xy + 12x + 4y + 2\,.$$

a. Bestem samtlige stationære punkter for f.

Opgave 4 fortsættes på side 3

b. Udregn Hessematricen i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ og vis, at f er strengt konveks.

c. Gør rede for at f har en mindsteværdi og find denne.

d. Gør rede for at f ikke har en størsteværdi.

Opgave 5. (Vægt 15%.)

Ligningen

$$\sin(xy - 1) + x^2 - y^3 = 0$$

fastlægger y som en 2 gange differentiabel funktion af x i nærheden af punktet $(x, y) = (1, 1)$. Lad denne funktion være betegnet $y = f(x)$.

a. Find $f'(1)$.

b. Find $f''(1)$ og opskriv Taylorpolynomiet af 2. orden for f ud fra punktet $x = 1$.

Opgave 6. (Vægt 10%.)

a. Angiv modulus (modulen) og hovedargument for de komplekse tal

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}\ ,\ z_2 = -1 + i\sqrt{3}\ .$$

b. Find rødderne i ligningen

$$z^2 + 2iz - 2 - i\sqrt{3} = 0\ .$$

SLUT