Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København, juli 2001

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 2 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1. (Vægt 15 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Gør rede for at $\underline{\underline{P}}$ er diagonaliserbar med hensyn til en ortonormal basis i $\mathbb{R}^4$.
b) Vis at $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ og at 0 og 1 er de eneste mulige egenværdier for $\underline{\underline{P}}$.
c) Vis at 1 har egenværdimultiplicitet 1, og angiv en diagonalform for $\underline{\underline{P}}$.

Opgave 2. (Vægt 15 %)

Funktionen $f(x, y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ er defineret for alle (x, y) i $\mathbb{R}^2$.
a) Find det approximerende Taylorpolynomium af 2. orden for f i punktet $(0, 0)$.
b) Afgør om $(0, 0)$ er et stationært punkt, og i bekræftende fald om det er et lokalt extremumspunkt eller et saddelpunkt.
c) Anfør (uden bevis) Taylorpolynomiet for f af 4. orden i punktet $(0, 0)$, idet det forudsættes bekendt at Taylorpolynomiet af 4. orden for funktionen $\cos(t)$ i punktet 0 har formen $1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4$.

Opgave 3. (Vægt 20 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Find det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$ og bestem dets rødder.
b) Find egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ og bestem deres egenværdimultiplicitet.
c) Gør rede for om $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar eller ej.

Sættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København, juli 2001
Matematik H1

Opgave 4. (Vægt 20 %)

Funktionen $f(x,y) = -(1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}$ er defineret på det lukkede kvadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ i $\mathbb{R}^2$.
a) Find de stationære punkter for f i det indre af kvadratet.
b) Vis at f er strengt konveks i det indre af kvadratet.
c) Gør rede for at f antager såvel en største som en mindste værdi på det lukkede kvadrat, og angiv disse.

Opgave 5. (Vægt 15 %)

Lad x, y og z være tre indbyrdes forskellige reelle tal og betragt vektorerne $\underline{u} = (1, x, x^2)$, $\underline{v} = (1, y, y^2)$ og $\underline{w} = (1, z, z^2)$ i $\mathbb{R}^3$.
a) Vis at $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ er et lineært uafhængigt system.
b) Find koordinaterne til vektoren $(1, 0, 0)$ i basen $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$.

Opgave 6. (Vægt 15 %)

a) Skitser området

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, \quad \sqrt{x} \leq y \leq x\}.$$

b) Udregn integralet

$$\iint_A \frac{y}{x} \exp\left(\frac{y^2}{x}\right) dx\, dy\,.$$