Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Juli 2000

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 2 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Find egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ og rodmultipliciteten af disse.
2) Bestem for hver af de fundne egenværdier en basis for det tilhørende egenrum.
3) Begrund uden at udføre diagonaliseringen, at $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar.
4) Bestem en matrix $\underline{\underline{S}}$, så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{D}}$ er en diagonalmatrix, og angiv $\underline{\underline{D}}$.

Opgave 2 (Vægt 15%)

Udregn alle 1. ordens partielle afledede for følgende funktioner:

$$f(x,y) = e^{5x+4y}\cos(3x+2y) - (x^2+2y^2)\ln(2x+3y) ,$$

$$g(x,y) = \int_{2x-3y}^{x^2+y^3} \frac{dt}{1+t^2} ,$$

$$h(x,y) = \int_1^2 \frac{2x^2y^3}{1+t^2} dt .$$

Opgave 3 (Vægt 15%)

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} .$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

1) Bestem ker f.
2) Find dimensionen af $f(\mathbb{R}^4)$, og angiv en basis for $f(\mathbb{R}^4)$.
3) Udvid den fundne basis for $f(\mathbb{R}^4)$ til en basis for $\mathbb{R}^3$.

Opgave 4 (Vægt 20%)

Lad

$$f(x,y) = x^3 + 2xy - y^2 - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Bestem samtlige stationære punkter for f.
2) Afgør for hvert af de fundne punkter, om f har lokalt minimum, lokalt maksimum eller saddelpunkt.
3) Vis, at f er konkav i halvplanen $x < -\frac{1}{3}$.
4) Begrund, at f har en størsteværdi i halvplanen $x < -\frac{1}{3}$, men ikke i $\mathbb{R}^2$.

Opgave 5 (Vægt 15%)

I talrummet $\mathbb{R}^4$ er givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Bestem en ortonormal basis for underrummet $U = \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.
2) Udregn ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på U.
3) Udvid den ortonormale basis i U til en ortonormal basis i $\mathbb{R}^4$. Vink: Benyt resultatet i spørgsmål 2.

Opgave 6 (Vægt 15%)

Lad

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Bestem eventuelle stationære punkter for f.
2) Lad A være området givet ved

$$A = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Skitsér området, og begrund, at f har såvel en største- som en mindsteværdi i A.
3) Bestem derpå største- og mindsteværdien for f i A.