Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Maj 2000

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 15%)

Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

1) Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$, for hvilke $\det \underline{\underline{A}} = 0$.
2) Find for ethvert $a \in \mathbb{R}$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Opgave 2 (Vægt 15%)

Det oplyses, at nedenstående problem har en løsning

$$\begin{aligned} &\text{minimér} \quad x^2 + y^2 + z^2 \\ &\text{under bibetingelserne} \quad x + y = 3, \;\; y - z = 3 . \end{aligned}$$

1) Find denne løsning ved Lagrange's metode.
2) Opstil dernæst en parameterfremstilling for de (x, y, z), der tilfredsstiller bibetingelserne, og anvend denne til at begrunde, at det tilsvarende maksimeringsproblem ikke har nogen løsning.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 15%)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{M}}(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $a \in \mathbb{R}$.

1) Begrund, at $\underline{\underline{M}}(a)$ er diagonaliserbar m.h.t. en ortonormal basis for ethvert $a \in \mathbb{R}$.

2) Vis, at søjlevektorerne

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

er egenvektorer for $\underline{\underline{M}}(a)$, og bestem de tilhørende egenværdier. Bestem en egentlig vektor $\underline{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$, som er ortogonal på $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$, og vis, at $\underline{v}_3$ er en egenvektor for $\underline{\underline{M}}(a)$.

3) Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$, således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{M}}(a)\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{D}}(a)$ er en diagonalmatrix, og angiv også $\underline{\underline{D}}(a)$.

Opgave 4 (Vægt 20%)

Lad

$$f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - x + y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Bestem samtlige stationære punkter for f, og afgør om f har lokalt minimum, lokalt maksimum eller saddelpunkt i de fundne punkter.

2) Lad

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\}\,.$$

Skitsér området, og begrund, at f har både en største- og en mindsteværdi i A.

3) Bestem derpå største- og mindsteværdien for f i A.

4) Udregn

$$\int\!\!\int_A (2y - x)\,dx\,dy\,.$$

Opgave 5 (Vægt 20%)

Betragt vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5 fortsættes på side 3

1) Vis, at $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, og at $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

2) Opskriv koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}^{-1}$ for overgang fra $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ til den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$, og koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{T}}^{-1}$ for overgang fra $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ til den naturlige basis for $\mathbb{R}^2$.

3) En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$f(\underline{a}_1) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2, \quad f(\underline{a}_2) = \underline{b}_2 - \underline{b}_1, \quad f(\underline{a}_3) = \underline{b}_2 \ .$$

Angiv den matrix $\tilde{\underline{\underline{A}}}$, som repræsenterer f m.h.t. til baserne $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ og $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$.

4) Bestem den matrix $\underline{\underline{A}}$, som repræsenterer f m.h.t. til de naturlige baser.

Opgave 6 (Vægt 15%)

Det oplyses, at ligningen

$$e^{\sin(x-2y)} + \sin y - 1 = 0$$

i en omegn af $(0, 0)$ bestemmer $y = f(x)$ som en C^2-funktion af x. Udregn det 2. Taylorpolynomium for $f(x)$ i udviklingspunktet $x = 0$. Vink: Man kan få brug for differentiationsreglen: $(FGH)' = F'GH + FG'H + FGH'$.

Skitsér grafen for f i et lille interval omkring 0.