

Matematik for geologer I 1996-ordningen, geometri

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1 (ca. 10 point)

Om to vektorer \vec{a} og \vec{b} i planen oplyses, at $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ og $\vec{a} \cdot \hat{b} = 16$.

Bestem koordinatsættet til vektoren \vec{b} .

Opgave 2 (ca. 20 point)

To linjer i rummet er givet ved parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; s \in \mathbb{R}$$

Bestem vinklen mellem de to linjer.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer.

Bestem en ligning for den plan α , der fastlægges af de to linjer.

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planen α og x,y -planen (dvs. planen med ligningen $z = 0$).

Opgave 3
(ca. 15 point)

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er givet ved matrixfremstillingen

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bestem $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestem den vektor \vec{u} , der ved f afbildes på vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Gør rede for, at afbildningen f er invertibel (har en omvendt afbildning f^{-1}), og bestem matrixfremstillingen for f^{-1} .

Opgave 4
(ca. 20 point)

En vektorfunktion $\vec{f}(t)$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ \frac{1}{2}t^3 - t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

Bestem de punkter, hvori grafen skærer koordinatsystemets akser, og bestem hastighedsvektorerne i disse punkter.

Bestem parameterværdierne til de punkter, hvori grafen har vandrette tangenter, og parameterværdierne til de punkter hvori grafen har lodrette tangenter.

Skitser grafen.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Tre punkter P_t , Q og R i planen er givet ved:

$$P_t = (-1 + 2t, 2 + t), \quad Q = (5, 4) \text{ og } R = (1, 5).$$

Bestem de værdier af t , for hvilke $\overrightarrow{QP_t}$ står vinkelret på $\overrightarrow{RP_t}$.

Bestem den værdi af t , for hvilken $\overrightarrow{QP_t}$ er parallel med $\overrightarrow{RP_t}$.

Bestem de værdier af t , for hvilke trekant P_tQR har arealet 4.

Opgave 6
(ca. 20 point)

I planen er en linje ℓ givet ved parameterfremstillingen

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 4t \\ -2 - 3t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

Bestem en ligning for linjen ℓ .

En cirkel har centrum i $(7,5)$ og har linjen ℓ som tangent.

Bestem en ligning for denne cirkel og bestem koordinatsættet til røringspunktet R for tangenten ℓ .

Bestem de punkter P på ℓ , som opfylder
 $|RP| = 15$.