

## Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.  
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

### Opgave 1 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen er givet punkterne  $A(2,2)$ ,  $B(4,5)$  og  $C(7,1)$ .

Beregn arealet af trekant ABC og gradtallet for vinkel A.

Vi sætter  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  og  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .

Bestem tallet  $t$  således, at vektoren  $\vec{a} + t\vec{b}$  står vinkelret på vektoren  $\vec{b}$ .

### Opgave 2 (ca. 20 point)

En plan  $\alpha$  er bestemt ved, at den indeholder punkterne  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(-3, -9, 1)$  og  $C(2, -7, -1)$ .

Bestem en ligning for planen  $\alpha$ .

En linje  $\ell$  går gennem punktet  $P(6, 21, 10)$  og har retningsvektoren  $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Bestem en parameterfremstilling for  $\ell$ .

Bestem skæringspunktet mellem  $\ell$  og  $\alpha$ .

Bestem koordinatsættet til det punkt på  $\ell$ , som har mindst

afstand til punktet  $Q(0,5,2)$ .

**Opgave 3**  
(ca. 20 point)

En lineær afbildning  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  er givet ved matrixfremstillingen

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tegn i et koordinatsystem billedet af kvadratet  $[0;1] \times [0;1]$  ved afbildningen  $f$ .

Gør rede for, at  $f$  er bijektiv, og bestem en matrixfremstilling for den inverse afbildning  $f^{-1}$ .

En anden lineær afbildning  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  har matrixfremstillingen

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning  $f \circ g$ .

Bestem matrixfremstillingen for afbildningen  $f+g$ , og beskriv denne afbildning geometrisk.

**Opgave 4**  
(ca. 15 point)

Det grafiske billede af funktionen

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

er skitseret på figuren.

Gør rede for, at grafen for  $f$  skærer x-aksen i punktet med koordinatsættet  $(\ln(2), 0)$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med koordinatsystemets akser et område  $M$  i 4. kvadrant.

Bestem arealet af M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes  $360^\circ$  om x-aksen.

**Opgave 5**  
(ca. 20 point)

Der er givet differentiaalligningen

$$y'' + 6y' - 7y = -7x^2 + 19x + 24$$

Bestem løsningsmængden til den tilsvarende homogene ligning

$$y'' + 6y' - 7y = 0$$

Bestem et andengradspolynomium, der er løsning til den inhomogene ligning

$$y'' + 6y' - 7y = -7x^2 + 19x + 24$$

Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning, og bestem specielt den løsning, der går gennem linjeelementet  $(0, 3; 9)$ .

**Opgave 6**  
(ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(2x+1)$$

Bestem dernæst den løsning, hvis graf går gennem punktet  $(1, 5)$ .

Bestem sluttelig den løsning, hvis graf går gennem punktet  $(1, 1)$ .