

Matematik for geologer

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 6 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen. Resultater opnået ved brug af lommeregnere eller computere kan kun indgå i besvarelsen, når det drejer sig om simple numeriske udregninger uden brug af programmering. Opgavesættet er på 2 sider.

Opgave 1

I rummet betragtes punkterne $P(2, 3, 4)$ og $Q(1, 2, 0)$, og linien l med parameterfremstillingen,

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lad m være linien gennem P og Q , og lad π være planen, der indeholder P og l .

- Bestem en parameterfremstilling for linien m .
- Bestem en ligning for planen π .
- Bestem cosinus til vinklen mellem π og m .

Opgave 2

Bestem følgende stamfunktioner:

$$(i) \int (2e^{3x} - \frac{1}{2}x^2) dx, \quad (ii) \int \sin(2x + 3) dx, \quad (iii) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

Opgave 3

- Bestem en funktion $y = f(t)$, som opfylder betingelserne,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+1} \quad \text{og} \quad f(0) = 2.$$

- I planen betragtes de to banekurver med parameterfremstillingerne,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}.$$

Begge kurver går gennem punktet $P(1, 1)$, svarende til parameterværdien $t = 1$. Bestem cosinus til vinklen mellem de to kurvers tangentvektorer i dette punkt.

Opgave 4

Grafen for funktionen $f(x) = 2 - \cos x$ for $0 \leq x \leq \pi$ drejes en hel omgang (360°) omkring x -aksen. Bestem rumfanget af det fremkomne omdrejningslegeme.

Opgave 5

Betragt følgende differentiaalligning:

$$y'' - y = e^t.$$

- (a) Vis, at funktionen $\frac{1}{2}te^t$ er en løsning til differentiaalligningen.
- (b) Find en funktion $y = f(t)$, som er en løsning til differentiaalligningen og opfylder, at $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$.

Opgave 6

Betragt funktionen

$$f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 - x + y.$$

- (a) Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- (b) Funktionen antager sit maksimum (dvs sin største værdi) i et punkt (x_0, y_0) . Bestem dette punkt.