Matematik for geologer

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 6 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen. Resultater opnået ved brug af lommeregnere kan kun indgå i besvarelsen, når det drejer sig om simple numeriske udregninger uden brug af programmering. Opgavesættet er på 2 sider.

Opgave 1

I rummet går linien ℓ gennem punkterne $A(1, 2, 3)$ og $B(1, 3, 5)$, og planen π går gennem punkterne $P(0, 1, 2)$, $Q(1, 2, 2)$ og $R(0, 2, 3)$.
(a) Bestem en parameterfremstilling for ℓ.
(b) Bestem en ligning for π.
(c) Bestem skæringspunktet mellem ℓ og π.

Opgave 2

Bestem følgende stamfunktioner:

$$\text{(i)} \quad \int \big(2x^3 - \sin(2x)\big)\, dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{1}{(2x+3)^3}\, dx\,, \qquad \text{(iii)} \quad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx\,.$$

Opgave 3

(a) Eftervis, idet mellemregningerne ved differentiationen ønskes medtaget, at funktionen $y = \ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$ har differentialkvotienten,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

(b) Find det bestemte integral,

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Opgave 4

(i) Bestem en funktion $y = f(t)$, som opfylder betingelserne,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{y} \quad \text{og} \quad f(1) = 2.$$

 Opgave 4 fortsættes på side 2

(ii) I planen betragtes de to banekurver med parameterfremstillingerne,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Begge kurver går gennem punktet $P(1, 1)$, svarende til parameterværdien $t = 1$. Bestem vinklen mellem de to kurvers tangentvektorer i dette punkt.

Opgave 5

Betragt følgende differentialligning:

$$y'' + y = \cos t.$$

(a) Bestem en konstant k således, at funktionen $y = k\,t \sin t$ er en løsning til differentialligningen.
(b) Find en funktion $y = f(t)$, som er en løsning til differentialligningen og opfylder, at $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$.

Opgave 6

Betragt funktionen

$$f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 6xy - 2x + 2y.$$

(a) Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(b) Funktionen antager sit minimum (dvs sin mindste værdi) i et punkt (x_0, y_0). Bestem dette punkt.