Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1998

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer
Alle sædvanlige hjælpemidler, såsom bøger, noter, notater og lommeregnere, kan medbringes.
Sættet omfatter ialt 5 opgaver og er på 3 sider. **Af opgaverne 4 og 5 må kun én afleveres til bedømmelse.** Opgave 4 er dækket af pensum for undervisningen i 1997/98, mens opgave 5 er dækket af pensum for de foregående år. Det er valgfrit for den enkelte studerende hvilken en af opgaverne der afleveres. De to opgaver vil blive vægtet ens ved bedømmelsen. Besvarelsen vil iøvrigt ved bedømmelsen blive helhedsvurderet.

Opgave 1 For $n = 1, 2, ...$ lader vi

$$f_n(z) := \frac{z}{(z-1)^n}, \; z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}.$$

a) Gør rede for at hver af funktionerne f_n er analytisk (holomorf) i definitionsområdet.

b) Angiv en rækkeudvikling for f_1 i en omegn af 0. Hvad er konvergensradius af den fundne række?

c) Find ordenen af polen i $z = 1$ for hver funktion f_n.

Lad $K(0, r)$ betegne cirklen med centrum i 0 og radius r, orienteret mod uret.

d) Udregn

$$\int_{K(0,r)} f_n(z)dz,$$

for $r < 1$ og for $r > 1$, for ethvert helt tal $n \geq 1$.

Opgave 2 Betragt Hilbertrummet $\ell^2(\mathbb{N})$. For vilkårligt element $\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^2(\mathbb{N})$ definerer vi

$$A\mathbf{x} := (\frac{2}{1}x_1, \frac{3}{2}x_2, ..., \frac{n+1}{n}x_n, ...)$$

a) Gør rede for at afbildningen $\mathbf{x} \curvearrowright A\mathbf{x}$ er en begrænset lineær operator på $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Vis at $\|A\| = 2$.

c) Vis at hvert tal af formen $\frac{n+1}{n}$ er en egenværdi for A.

d) Gør rede for at A er selvadjungeret.

(opgavesættet fortsættes på s. 2)

Opgave 3 Lad f betegne den 2π-periodiske funktion, der på intervallet $[-\pi, \pi]$ er givet ved $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$. Det oplyses at Fourierrækken for f er

$$12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx$$

a) Giv en kort begrundelse for at Fourierrækken er en sin-række?

b) Angiv en uendelig række, der er løsning til problemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ for } x \in]0, \pi[, t > 0$$

med randbetingelserne

$$\begin{array}{l} u(x,0) = x(\pi^2 - x^2),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ \ x \in [0, \pi] \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0,\ \ t \geq 0. \end{array}$$

c) Løs, også på uendelig række-form, varmeledningsproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ for } x \in]0, \pi[, t > 0$$

med randbetingelserne

$$\begin{array}{l} u(x,0) = x(\pi^2 - x^2),\ \ x \in [0, \pi] \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0,\ \ t \geq 0. \end{array} .$$

Af opgaverne 4 og 5 må kun én afleveres til bedømmelse. Opgave 4 er dækket af pensum for undervisningen i 1997/98, mens opgave 5 er dækket af pensum for de foregående år. Det er valgfrit for den enkelte studerende hvilken en af opgaverne der afleveres.

Opgave 4 Lad funktionen f være defineret ved $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$. Det oplyses at den Fouriertransformerede

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dw$$

af f er $\widehat{f}(w) = e^{-\frac{w^2}{2}}$.

Betragt ligningen

$$f * (y'' - y) = \sqrt{2\pi} f,$$

hvor $*$ betegner foldning, og hvor $y := y(x)$ er en kompleks funktion, defineret på $\mathbb{R}$.

a) Idet det forudsættes at y har en Fouriertransformeret $\widehat{y}$, skal du ved Fouriertransformation af ovenstående ligning opskrive en ligning for $\widehat{y}$.

b) Gør rede for at

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + w^2} e^{iwx} dw$$

(opgavesættet fortsættes på s. 3)

Af opgaverne 4 og 5 må kun én afleveres til bedømmelse. Opgave 4 er dækket af pensum for undervisningen i 1997/98, mens opgave 5 er dækket af pensum for de foregående år. Det er valgfrit for den enkelte studerende hvilken en af opgaverne der afleveres.

Opgave 5 Betragt differentialligningen

$$2x^2y'' + (x - 2x^2)y' - xy = 0.$$

a) Godtgør, at $x = 0$ er et regulært singulært punkt.

b) Gør rede for, at der findes to lineært uafhængige løsninger y_1 og y_2 af form

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

hvor potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ har positiv konvergensradius. Bestem rekursionsformler for koefficienterne $a_0, a_1, \ldots$ og $b_0, b_1, \ldots$ i hver af de to potensrækker.

(opgavesættet er slut)