Københavns Universitet
Naturvidenskabelig Kandidateksamen, Vinteren 1997-98

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver, på 2 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.

Opgave 1

Betragt de komplekse funktioner

$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{1-z}, \qquad g(z) = z^{-3} f(z).$$

a) Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ være potensrækken der fremstiller f i omegnen af 0. Bestem koefficienterne a_0, a_1 og a_2. Angiv rækkens konvergensradius.

b) Funktionen g har en pol i $z = 0$; lad m betegne dens orden. Bestem m. Lad $\sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$ være Laurentrækken der fremstiller g i en udprikket omegn af 0. Angiv de første m koefficienter (altså $b_{-m}, \dots b_{-1}$) i rækken.

c) Lad k betegne en cirkel med centrum 0, radius $R > 1$ og med positiv orientering. Beregn kurveintegralet $\int_k g(z)\, dz$.

Opgave 2

Ved besvarelse af denne opgave kan følgende benyttes uden bevis:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2-1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \simeq 1.2020569, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-6} = \frac{\pi^6}{945} \simeq 1.0173431.$$

Lad H betegne Hilbertrummet ℓ^2.

a) Lad $n \in \mathbb{N}$ og definer følgen $\mathbf{h} \in H$ ved $\mathbf{h} = (1, 3, 5, \dots, 2n-1, 0, 0, \dots)$. Bestem $\|\mathbf{h}\|$. Vis dernæst, at der for $\mathbf{x} \in H$ gælder

$$|\sum_{k=1}^{n} (2k-1) x_k| \le \sqrt{\frac{4n^3}{3}}\ \|x\|$$

(udnyt Cauchy-Schwartz uligheden).

b) For en givet følge $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ defineres en ny følge $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$ ved

$$s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) x_k.$$

Vis, at $\mathbf{s} \in \ell^2$ hvis $\mathbf{x} \in \ell^2$, og gør rede for at operatoren $S\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{s}$ er en begrænset lineær operator på H med $\|S\| \le 1.266$.

c) Lad $\mathbf{e} = (1, 0, 0, \dots)$. Bestem $S\mathbf{e}$ og $\|S\mathbf{e}\|$. Vis, at der gælder $\|S\| \ge 1.008$.

d) Vis at der gælder $\langle S\mathbf{x}, \mathbf{e}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}\rangle$ for alle $\mathbf{x} \in H$. Bestem på baggrund heraf vektoren $S^*\mathbf{e}$, hvor S^* er den adjungerede operator.

e) Er S normal? (Vink: Betragt længderne af vektorerne $S\mathbf{e}$ og $S^*\mathbf{e}$).

f) Lad $\mathbf{u} = (1, -5, 0, 0, \ldots)$. Vis, at $\mathbf{u}$ er egenvektor for S^* og bestem den tilhørende egenværdi.

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$x(1-x)y'' + (\alpha - 3x)y' - y = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

hvor α er en reel konstant.

a) Lad $\alpha = 2$. Bestem en løsning af formen $y = x^\beta$, hvor $\beta \in \mathbb{R}$. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen på intervallet $0 < x < 1$, ved reduktion af ordenen. Som hjælp anføres at der gælder stambrøksopspaltningen

$$\frac{2-3x}{x(1-x)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

b) Godtgør, at $x = 0$ er et regulært singulært punkt for differentialligningen, for alle værdier af α, og bestem de tilhørende eksponenter.

c) Lad $\alpha = 1$. Bestem en løsning y på form af en potensrække $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, med $a_0 = 1$ og med positiv konvergensradius.

Opgave 4

Ved besvarelse af denne opgave kan man benytte integralformlerne

$$\int s\cos s\, ds = \cos s + s\sin s, \qquad \int s^2 \cos s\, ds = 2s\cos s + (s^2 - 2)\sin s.$$

a) Lad $g(s)$, $s \in [0, \pi]$, være funktionen givet ved $g(s) = 2\pi s - s^2$, og lad $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ns)$ være dens Fourier-cosinus række. Bestem a_0, og vis at der for $n > 0$ gælder

$$a_n = -\frac{4}{n^2}.$$

b) Find alle værdier ≥ 0 af konstanten λ for hvilke endepunktsproblemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0 \\ f'(0) = f'(\pi) = 0 \end{cases}$$

har en ikke-triviel løsning f på intervallet $[0, \pi]$, og angiv en sådan løsning for hver af disse værdier af λ. [Det oplyses, og skal ikke vises, at der er ingen ikke-trivialle løsninger for $\lambda < 0$.]

c) Betragt en 2-dimensional plade af bredde π og halv-uendelig længde (det vil sige den strækker sig i det uendelige i én retning). Indlæg koordinaterne (x, y), hvor $0 \leq y \leq \pi$ og $0 \leq x$, på pladen, og antag at pladens temperatur $u(x, y)$ er konstant m.h.t. tiden (såkaldt steady state), således at funktionen $u(x, y)$ opfylder Laplaces ligning i området $\{(x, y) \mid 0 < x,\ 0 < y < \pi\}$. Antag endvidere at langsiderne givet ved $y = 0$ og $y = \pi$ er isolerede, således at der gælder $u'_y(x, 0) = u'_y(x, \pi) = 0$ for alle $x > 0$, og antag at $u(x, y)$ er begrænset for $x \to \infty$. Antag endelig at på den korte side hvor $x = 0$ gælder $u(0, y) = g(y)$, $0 < y < \pi$, hvor g er funktionen defineret i spørgsmål a). Bestem en rækkefremstilling for u (konvergens af rækken skal ikke behandles).