Københavns Universitet
Naturvidenskabelig Kandidateksamen, Sommeren 1997

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.

Opgave 1

For et givet helt tal n betragtes den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{z^n}{1-z^2}.$$

a) Bestem, for hvert $n \in \mathbb{Z}$, residuet af f i punkterne 0, 1, -1.
b) Lad k betegne en cirkel med centrum 0, radius $r > 1$ og med positiv orientering. Beregn kurveintegralet $\int_k f(z)\,dz$ for hver af de fire værdier $n = \pm 1, \pm 2$.

Opgave 2

Betragt et uendelig dimensionalt Hilbertrum H i hvilket der er givet et fuldstændigt ortonormalsystem $(\phi_1, \phi_2, \dots)$. For $u \in H$ defineres

$$Su = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \langle u, \phi_{n+1} \rangle \phi_n \qquad \text{og} \qquad Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \langle u, \phi_n \rangle \phi_{n+1}.$$

a) Gør rede for at Su og Tu tilhører H, og at der herved defineres begrænsede operatorer S og T på H.
b) Angiv $S\phi_i$ og $T\phi_i$ for $i = 1, 2$, og udregn $[S,T]\phi_1$, hvor $[S,T]$ betegner kommutatoren af S og T.
c) Lad $G = \mathrm{sp}(\phi_1, \phi_2)$. Undersøg om underrummene G og $G^\perp$ er invariante for henholdsvis S og T. Angiv matricen for restriktionen S_G af S til G med hensyn til basen ϕ_1, ϕ_2. Bestem normen $\|S_G\|$ af S_G.
d) Bestem normen $\|S\|$ af S.
e) Vis at $S^* = T$ og $T^* = S$. Er S, henholdsvis T, selvadjungeret, unitær, eller normal?
f) Vis at vektoren $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \phi_n$ er egenvektor for S, og angiv den tilhørende egenværdi.
g) Vis at $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ er indeholdt i punktspektret $\sigma_p(S)$ for S.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Godtgør, at $x = 0$ er et regulært singulært punkt for denne differentialligning, og bestem eksponenterne i punktet.
b) Bestem en løsning y på form af en Frobeniusrække

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

hvor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er en potensrække med $a_0 = 1$ og med positiv konvergensradius. Angiv også denne konvergensradius.

Opgave 4

a) Lad $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ betegne de positive nulpunkter (i voksende rækkefølge) for Bessel funktionen J_0. Find Fourier–Bessel rækken

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\frac{\gamma_k x}{2})$$

for funktionen $f(x)$ defineret på intervallet $[0, 2]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Angiv rækkens sum for ethvert $x \in]0, 2[$.
b) Bestem en rækkefremstilling af en løsning $u = u(r, t)$ til randværdiproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}, & 0 < r < 2, t < 0 \\ u(2, t) = 0, & t \ge 0 \\ u(r, 0) = f(r), & 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

(konvergens af rækken skal ikke behandles).