Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1996-97

Matematik F

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1.

a) Begrund at differentialligningen

$$x^2 y'' = (2 + x^2) y$$

har netop 1 løsning $y = f(x)$, $y \in \mathbb{R}$ for hvilken $f''(0) = 1$.

b) Begrund at f er en lige funktion, hvis potensrækkeudvikling i 0 konvergerer på hele den reelle akse.

c) Find de første 3 led, som er forskellige fra 0, i denne potensrække.

Opgave 2.

To ens 1 m lange homogene jernstænger nedkøles/opvarmes til temperaturerne 0° og 100°, hvorefter de fuldstændigt varmeisolerede anbringes i forlængelse af hinanden. En x-akse tænkes placeret, så stængernes frie ender får koordinaterne $x = -1$ og $x = 1$.

Dette fører til, at temperaturen $T(x,t)$ i x til tiden t kan findes som løsning til varmeledningsproblemet

$$\begin{aligned}
T_t &= a\, T_{xx} \\
T(x,0) &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -1 \le x < 0 \\ 50 & \text{for} \quad x = 0 \\ 100 & \text{for} \quad 0 < x \le 1 \end{cases} \\
T_x(-1,t) &= 0 \text{ for } t > 0 \\
T_x(1,t) &= 0 \text{ for } t > 0,
\end{aligned}$$

hvor a er en materialekonstant.

a) Find en rækkeudvikling for løsningen $T(x,t)$.

b) Bestem for $a = 0.000023\,\mathrm{m}^2/\mathrm{sek}$ temperaturen afrundet til hele grader efter 5 timer i endepunkterne $x = -1$ og $x = 1$. (Det er kun nødvendigt at udregne to led i rækkeudviklingen).

Opgavesættet fortsætter på side 2

Opgave 3.

Lad Ω være området $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, der som sædvanlig identificeres med $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og lad $u : \Omega \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$u(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

a) Vis at u er harmonisk i Ω.

b) Vis at $v : \Omega \to \mathbb{R}$ givet ved

$$v(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

er konjugeret til u, og at $u(z) + iv(z)$ er lig

$$f(z) = \frac{i}{z^2}$$

for $z \in \Omega$.

c) Beregn $\int_k f(z)dz$, hvor k er en vilkårlig kurve i Ω, der løber fra -1 til 1, og begrund, at integralet er uafhængigt af valget af kurve.

Opgave 4.

Antag at H er et komplekst Hilbertrum, og at den lineære operator $S : H \to H$ er defineret ved

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b},$$

hvor $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$.

a) Vis at S er en begrænset operator.

b) Vis at underrummet $\mathrm{sp}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ reducerer S.

c) Find et udtryk for den adjungerede operator $\overline{S}$.

d) Undersøg for hvilke vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ operatoren S er

selvadjungeret,
unitær,
normal,
invertibel.