Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1996

Matematik F

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1.

Begrund at differentialligningen

$$x^2y'' + J_1(x)y' + x^2y = 0,$$

hvor J_1 er 1. ordens Besselfunktionen af 1. art, har en løsning på hele den reelle akse af formen $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, og find a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 for en sådan løsning.

Opgave 2.

Funktion $f(t) = t(2-t)$, $t \in [0,2]$ vides at have Fourier-sinusrække

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \sin\frac{n\pi t}{2}.$$

a) Bestem en rækkefremstilling af løsningen til Dirichlet-problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ 0 < x < 2, \ 0 < y < 2 \\ u(x,y) = f(x) + f(y) \text{ for } (x,y) \in \partial([0,2]\times[0,2]), \end{cases}$$

hvor $\partial([0,2]\times[0,2])$ betegner randen af kvadratet $[0,2]\times[0,2]$.

b) Bestem dernæst en rækkefremstilling af løsningen til

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1, \ 0 < x < 2, \ 0 < y < 2 \\ u(x,y) = 0 \text{ for } (x,y) \in \partial([0,2]\times[0,2]). \end{cases}$$

(Vink: Udnyt at $u(x,y) = f(x) + f(y)$ opfylder $u_{xx} + u_{yy} = -4$).

Opgavesættet fortsætter på side 2

Opgave 3.

En lukket, differentiabel kurve k i $\mathbb{C}$ er givet ved parameterfremstillingen

$$t \mapsto 2\,(1 + i\cos t)\,\sin t,\; t \in [0, 2\pi].$$

a) Tegn kurven k med angivelse af, hvorledes den gennemløbes.

b) Beregn $\operatorname{Res}\frac{1}{\cos z}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}$ og $\operatorname{Res}\frac{1}{\cos z}\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}}$.

c) Beregn $\int_k \frac{dx}{\cos z}$. $\to$ $\int_k \frac{dz}{\cos z}$

Opgave 4.

Lad H være et endelig-dimensionalt Hilbertrum, og lad funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være givet ved $f(z) = |z|$.

a) Forklar, hvorledes $f(T)$ er defineret for normale operatorer $T : H \to H$.

b) Begrund at $f(T) = T$, når T er selvadjungeret og positiv.

c) Begrund at $f(T)$ er identiteten $I : H \to H$, når T er unitær.

d) Begrund at $f(ST) = f(S)f(T)$, når S og T er kommuterende, normale operatorer.

e) Antag at T i en ortonormal basis α repræsenteres af matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vis at T er normal, og find matricen, der repræsenterer $f(T)$ i basen α.