Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-96

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

a) Begrund, at problemet

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[x^2\dfrac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0\,, & 1 < x < 2 \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

er et regulært Sturm-Liouville problem.

b) Bestem samtlige egenværdier og egenfunktioner for dette problem.

Opgave 2

a) Find Fourier-sinus rækken for funktionen

$$f(x) = x\sin x\,, \quad x \in [0,\pi]\,.$$

b) Begrund, at Fourier-sinus rækken for f er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

c) Bestem en rækkefremstilling af løsningen til følgende Dirichlet problem:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,, \quad 0 \le y \le 1 \\ u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,, \quad 0 \le y \le 1 \\ u(x,1) = x\sin x\,, \quad 0 \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Opgave 3

Lad $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (-1)^m & \text{for } x \in \left]\dfrac{m}{2^n}, \dfrac{m+1}{2^n}\right[\,, \quad m = 0, 1, \cdots, 2^n - 1\,, \\ 0 & \text{for } x = \dfrac{m}{2^n}\,, \quad m = 0, 1, \cdots, 2^n\,. \end{cases}$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-96
Matematik F

for $n = 1, 2, \cdots$, og $\varphi_0 = 1$.

a) Tegn grafer af $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, og begrund, at $\{\varphi_n\}$ er et ortonormalsystem i $\mathcal{L}^2([0,1],1)$.

b) For $l = 0, 1, 2, \cdots$ er $f_l : [0,1] \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2^l}, \\ 0 & \text{for } \frac{1}{2^l} < x \leqq 1 . \end{cases}$$

Bestem for $l = 0, 1, 2, \cdots$ Fourierkoefficienterne i udviklingen

$$f_l \sim \sum c_n(l)\varphi_n ,$$

og angiv de l, for hvilke

$$\|f_l\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(l)^2 .$$

c) Vis, at funktionen $f(x) = x$ på $[0,1]$ har Fourierudviklingen

$$f \sim \frac{1}{2}\varphi_0 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n ,$$

og eftervis, at

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 .$$

Det kan benyttes uden bevis, at

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} (-1)^m(2m+1) = -2^n .$$

Opgave 4

Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-\cos z)(1-2\cos z)} .$$

a) Begrund, at f har en Laurenrækkeudvikling i en udprikket cirkel $S'(0,r)$, $r > 0$, og bestem den størst mulige værdi af r.

b) Find

$$\int_k f(z)\,dz ,$$

når k er den positivt orienterede cirkel med centrum 0 og radius π.