Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1995

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$(*) \qquad x^2y'' + (x - x^2)y' - \frac{1}{9}y = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Godtgør, at $x = 0$ er det eneste singulære punkt for denne differentialligning, og at dette er et regulært singulært punkt.

b) Bestem eksponenterne r_1 og r_2 for $(*)$ i punktet $x = 0$.

c) Begrund, at der på $]0, +\infty[$ findes to lineært uafhængige løsninger y_1 og y_2 til $(*)$ af formen

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \qquad y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,,$$

hvor de to potensrækker er konvergente for alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Idet vi antager, at $r_1 \geq r_2$ og sætter $b_0 = 1$, skal man beregne b_1 og b_2.

Opgave 2

Lad funktionen $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}x & \text{for } 1 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

a) Bestem Fourier-sinus rækken hørende til f.

b) Begrund, at denne række konvergerer imod $f(x)$ for hvert $x \in [0, 2]$.

c) Find en rækkefremstilling af en løsning til randværdiproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & 0 < x < 2\,, \quad t > 0\,, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0\,, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt underrummet

$$H = \text{sp}\,\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

af det komplekse Hilbertrum $L^2([-\pi, \pi], 1)$ med ortonormal basis $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$, hvor

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \,, \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \,, \; 1 \leq n \leq 3 \,.$$

Lad $T = H \to H$ være den lineære operator givet ved

$$Tu_n = nv_n \,, \quad Tv_n = -nu_n \,, \; 1 \leq n \leq 3 \,.$$

a) Angiv matricen $\underline{\underline{T}}$, der repræsenterer T m.h.t. basen $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$.

b) Bestem samtlige egenværdier for T og de tilhørende egenrum.

c) Vis, at T har en spektralfremstilling, og angiv $\|T\|$.

Opgave 4

Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$$

i området

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin z \neq 0\} \,.$$

a) Begrund, at f har en potensrækkeudvikling i en cirkelskive $S(\frac{\pi}{2}, r)$, $r > 0$.

b) Bestem konvergensradius for denne række.

c) Find

$$\int_k f(z)\, dz \,,$$

hvor k er den positivt orienterede enhedscirkel med centrum i 0.