Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1994-95

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Betragt følgende Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda \cdot \dfrac{1}{x} y = 0\,, & x \in]1,2[\,, \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}.$$

a) Begrund, at problemet er regulært.

b) Bestem samtlige egenværdier og dertil hørende egenfunktioner.
Vink. Omskriv differentialligningen til en ligning af Euler-Cauchy typen.

Opgave 2

a) Bestem løsningen til Dirichlet problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & x^2 + y^2 < 2 \\ u(x,y) = 5xy \text{ for } x^2 + y^2 = 2\,. \end{cases}$$

b) Beregn løsningens værdi i $(-1,0)$.

Opgave 3

Betragt Hilbertrummet $H = L^2([0,\pi],1)$ og lad $(u_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ være det fuldstændige ortonormalsystem i H, hvor $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$ for $n \geq 1$ og $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $x \in [0,\pi]$.

Opgave 3 fortsættes på side 2

a) Begrund, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} u_n$$

er konvergent i H. Betegnes summen med f, skal man beregne

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \ .$$

b) Vi definerer en lineær operator T på H ved

$$Tv = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n a_n u_n \ ,$$

hvor $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ er koordinatvektoren for $v \in H$ m.h.t. $(u_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, d.v.s. $v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$.

Bestem samtlige egenværdier for T og tilhørende egenvektorer.

c) Godtgør, at T er en isometri.

d) Beregn $(1+T^4)f$, hvor f betegner funktionen

$$f(x) = \sin^2 x \ , \quad x \in [0, \pi] \ .$$

Opgave 4

Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z^3 + 2iz^2 - z} & \text{for } z^3 + 2iz^2 - z \neq 0 \\ -1 & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

i området $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 + 2iz^2 - z \neq 0\} \cup \{0\}$.

a) Begrund, at f er holomorf i Ω.

b) Bestem konvergensradius for potensrækken for f med centrum 0.

c) Beregn $\int_{k_1} f(z)dz$, hvor k_1 betegner cirklen med centrum 0 og radius $\frac{1}{2}$ med positiv orientering.

d) Beregn $\int_{k_2} f(z)dz$, hvor k_2 betegner cirklen med centrum 0 og radius 2 med positiv orientering.