Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1994

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

a) Eftervis, at funktionen

$$y(x) = x^2 J_{\frac{3}{4}}(x^2)\,, \quad x > 0\,,$$

er en løsning til differentialligningen

$$x^2 y'' - 3xy' + \left(\frac{7}{4} + 4x^4\right) y = 0\,, \quad x > 0\,,$$

hvor $J_{\frac{3}{4}}$ betegner Besselfunktionen af første slags af orden $\frac{3}{4}$.

b) Benyt en rækkefremstilling af $J_{\frac{3}{4}}$ til at bestemme $\alpha \in \mathbf{R}$, således at grænseværdien af $\frac{y(x)}{x^\alpha}$ for $x \to 0$ er endelig og forskellig fra 0.

Opgave 2

a) Find Fourier-sinus rækken for funktionen

$$f(x) = x(1-x)\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

b) Bestem herefter en rækkefremstilling af løsningen til følgende Dirichlet problem:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & 0 < x < 1\,, 0 < y < 1\,, \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0\,, & 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le 1\,, \\ u(0,y) = y(1-y)\,, & 0 \le y \le 1\,. \end{cases}$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad H være et komplekst Hilbertrum og lad $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ være en ortonormal basis for H.

a) Eftervis, at operatoren U på H, der med hensyn til basen α repræsenteres af matricen
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{i}{2} & \frac{1}{6}-\frac{i}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6}-\frac{i}{2} & \frac{1}{6}+\frac{i}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
er unitær.

b) Begrund, at U har en spektralfremstilling.

c) Idet det oplyses, at spektret for U er $\{+1, -1, i\}$ skal man bestemme en ortonormalbasis for H m.h.t. hvilken U repræsenteres af en diagonalmatrix.

d) Bestem en operator T på H, således at
$$U = e^{i\pi T} .$$

Opgave 4

Betragt den komplekse funktion
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + (1+i)z + i}$$
i området
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (1+i)z + i \neq 0\} .$$

a) Begrund, at f har en potensrækkefremstilling i en (ikke-tom) åben cirkelskive med centrum i 0.

b) Bestem konvergensradius for denne række.

c) Beregn de første tre led i rækken.