

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Find en rækkefremstilling af en løsning til Dirichlet problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in]0, 1[, y \in]0, 1[\\ u(x, 0) = 3 \sin(5\pi x) + 5 \sin(10\pi x), \\ u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0. \end{cases}$$

Opgave 2

Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ være periodisk med periode 2π og givet på intervallet $] -\pi, \pi]$ ved

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta + \frac{\pi}{2}, & -\pi < \theta \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -\theta - \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0, \\ -\theta + \frac{\pi}{2}, & 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \theta - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

- i) Skitsér grafen for funktionen f .
- ii) Find den trigonometriske række (Fourier rækken) hørende til f .
- iii) Find Fourier rækkens sum i punkterne $p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

Opgave 3

Betragt det regulære Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} -(e^{2x} u')' = \lambda e^{2x} u, & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Find samtlige egenværdier og de dertil hørende egenfunktioner.

Opgave 4

Det oplyses, at det komplekse polynomium

$$z^4 - 6z^3 + 26z^2 - 6z + 25$$

har nulpunkt i det komplekse tal i .

Beregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 6x^3 + 26x^2 - 6x + 25}.$$