

Matematik F

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Løs ligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Opgave 2

Der er givet følgende randværdiproblem

$$-(e^x u')' + 2e^x u = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) - u'(0) = 0,$$

$$2u(1) + u'(1) = 0.$$

a) Find Greens funktion for ovenstående problem.

b) Løs problemet eksplicit for $f(x) = e^{-x}$.

Opgave 3

Løs Dirichletproblemet

$$\Delta u = 0 \quad \text{i} \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\},$$

$$u(x, y) = x^3 \quad \text{for} \quad (x, y) \in \partial(\Omega).$$

Løsningen ønskes angivet eksplicit som funktion af x og y . Ved udregningen kan man med fordel benytte formelen $4 \cos^3 \theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta$.

Opgave 4

Find den fouriertransformerede af funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x}{x^4 + 13x^2 + 36}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Det foreslås, men er intet krav, at man ved beregningen benytter noternes konvention:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$