

Matematik F

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlig hjælpemidler kan medbringes.

Opgave 1

Betragt problemet

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, & x \in]0, \pi[, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in [0, \pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sin^3 x, & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0.\end{aligned}$$

Find løsningen explicit, altså ikke kun på integralform.

Opgave 2

Lad $f(\theta)$ være defineret ved $f(\theta) = \theta$ for $\theta \in [0, \pi/2[$,

$$f(\theta) = 0 \text{ for } \theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi[\text{ og } f(\theta + 2\pi) = f(\theta).$$

- i) Skitser funktionen $f(\theta)$.
- ii) Find den trigonometriske Fourier række hørende til $f(\theta)$.
- iii) Find Fourier rækkens sum s i punktet $\frac{\pi}{2}$.

Opgave 3

Find Green's funktion hørende til problemet

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Opgave 4

Vis at

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}.$$