

Matematik F

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Lad os betragte problemet

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x(\pi - x), & x \in]0, \pi[, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in [0, \pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) &= 0, & t \geq 0,\end{aligned}$$

- i) Find løsningen $u(x, t)$ i den karakteristiske trekant $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0, t \leq \frac{x}{c}, t \leq \frac{\pi-x}{c}\}$.
- ii) Skitser hvordan man finder løsningen i hele $]0, \pi[\times]0, \infty[$.

Opgave 2

Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ være sådan at $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$, $f(\theta) = \cos \theta$ for $\theta \in [0, \pi[$ og $f(\theta) = 0$ for $\theta \in [\pi, 2\pi[$.

- i) Skitser funktionen $f(\theta)$.
- ii) Find den trigonometriske Fourier række hørende til $f(\theta)$.
- iii) Find Fourier rækkens sum s i punktet $\theta = 0$.

Opgave 3

Opgave 3. Løs følgende inhomogene differential ligning

$$\begin{aligned}-(x^2 u')' &= f(x), & x \in]1, 2[, \\ u(1) = u(2) &= 0,\end{aligned}$$

hvor $f \in C([1, 2])$.

Opgave 4

Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2 - 2x + 2} dx = -\pi e^{-\pi}.$$