Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2000

Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} + \frac{\sin z}{z^2+1}\,.$$

a) Angiv den største delmængde af $\mathbb{C}$, hvori f er analytisk, og bestem de punkter, hvori f har en pol, samt ordenen af polerne.

b) Begrund, at f har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$$

i en omegn af 1, og bestem rækkens konvergensradius.

c) Beregn koefficienterne a_0, a_1 og a_2 i potensrækken i b).

d) Bestem værdien af integralerne

$$\oint_{C(\frac{6}{5})} f(z)dz \;\text{ og }\; \oint_{C(\frac{3}{2})} f(z)dz,$$

hvor $C(r)$ betegner cirklen med centrum i 1 og radius r, orienteret mod uret.

Opgave 2

For en vilkårlig følge $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ tilhørende Hilbert rummet $\ell^2(\mathbb{N})$ sættes

$$Ax = \Big(\frac{2}{1}x_1, \frac{2^2}{\sqrt{2}}\,x_2, \frac{2^3}{\sqrt{6}}\,x_3, \dots, \frac{2^n}{\sqrt{n!}}\,x_n, \dots\Big)\,.$$

a) Gør rede for, at der herved defineres en begrænset lineær operator på $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Vis, at følgen $a = (2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-1}, 2^{-\frac{3}{2}}, \dots, 2^{-\frac{n}{2}}, \dots)$ tilhører $\ell^2(\mathbb{N})$ og beregn $\|a\|$ og $\|Aa\|$, hvor $\|\cdot\|$ betegner normen i $\ell^2(\mathbb{N})$.

c) Vis, at $\frac{8}{\sqrt{6}}$ er egenværdi for A og find to tilhørende lineært uafhængige egenvektorer.

d) Gør rede for, at A er selvadjungeret.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$x(2-x)y'' - (2+x)y' + y = 0\,.$$

a) Godtgør, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og bestem dens rødder.

b) Bestem en ikke triviel løsning y angivet på formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

hvor potensrækken har positiv konvergensradius. Bestem rækkens konvergensradius.

c) Angiv et eksplicit udtryk for løsningen fundet under b) ved at bestemme summen af potensrækken.

Opgave 4

Lad funktionen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = |\sin 2x|\,, \quad x \in [0,\pi]\,.$$

a) Skitsér grafen for den ulige periodiske udvidelse af f med periode 2π i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Gør rede for, at Fourier sinus-rækken for f er

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+3)} \sin(2n+1)x\,.$$

c) Gør rede for, at ovennævnte række er konvergent i alle punkter $x \in \mathbb{R}$ og bestem rækkens sum for hvert $x \in \mathbb{R}$.

d) Angiv løsningen u til problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = |\sin 2x|\,, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t \ge 0 \end{cases}$$

på rækkeform.