Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik DM

3 timers skriftlig prøve med sædvanlige hjælpemidler. Opgavesættet består af 6 opgaver og er på 3 sider.

Opgave 1

Bestem det mindste naturlige tal x som tilfredsstiller

$$2x \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 7), \qquad 5x \equiv 6 \,(\mathrm{mod}\ 11).$$

Opgave 2

Ved et skandinavisk møde hvor der deltager 6 svenskere, 5 nordmænd og 4 danskere, ønsker man at tage et fotografi hvor alle deltagerne står på én række.

a) På hvor mange måder kan opstillingen foretages, når vi ønsker at repræsentanterne for hver nation står samlet.

b) På hvor mange måder kan opstillingen foretages, når vi ønsker at ingen nations repræsentanter står samlet.

For at præcisere det matematiske indhold kan det nævnes, at der ikke findes tvillingepar, trillinger eller lignende blandt deltagerne samt at udtrykket "samlet" betyder at en nations repræsentanter står ved siden af hinanden på rækken uden overspringelser.

Opgave 3

Vi betragter den perfekte binære Hamming kode $[7, 4]$, som kaldes C. Denne kode udvides til en binær $\widehat{C}$ kode af længde 9 ved tilføjelse af 2 checkbits x_8 og x_9 som skal tilfredsstille ligningerne:

$$x_8 = x_3 + x_5 + x_6, \qquad x_9 = x_6 + x_7.$$

a) Begrund, at $\widehat{C}$ er en lineær kode.

b) Idet H betegner den sædvanlige checkmatrix for C skal man ved tilføjelse af 2 rækker og 2 søjler til H konstruere en checkmatrix $\widehat{H}$ for $\widehat{C}$.

c) Begrund, at den mindste vægt af ord i $\widehat{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ er mindst 4 og vis ved f.eks. at betragte søjlerne i $\widehat{H}$ med numrene 2, 3, 4 og 5 at minimalvægten ($\neq 0$) er 4.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

Der er givet et sammenhørende sæt bestående af 2 lineære første ordens differensligninger

$$x_{n+1} = -7x_n + 9y_n$$
$$y_{n+1} = -6x_n + 8y_n.$$

Bestem den løsning $\{(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ som opfylder $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Opgave 5

Der er givet nedenstående graf G med de 7 punkter $\{v_1, \ldots, v_7\}$.

a) Opskriv nabomatricen for G.

b) Begrund, at G har en Eulertur og angiv den på en tegning eller ved at opskrive punkterne i den rækkefølge turen passerer igennem dem.

c) Vis hvorledes Kuratowskis sætning kan anvendes på denne graf for at indse, at G ikke er planar.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6

Et projekt kræver gennemførsel af aktiviteterne $A_1, \ldots, A_{10}$. Nedenstående tabel angiver de enkelte aktiviteters varighed samt deres indbyrdes afhængighed.

Aktivitet	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Afhænger af	–	–	–	A_2	A_2	A_1, A_4	A_2	A_3, A_5	A_6, A_7, A_8	A_9
Varighed	8	5	6	4	7	7	10	8	4	3

a) Tegn et aktivitetsnetværk, som netop indeholder den information, som tabellen giver.

b) Bestem en kritisk vej gennem netværket ved at gennemføre det lærebogen benævner "critical path algorithm".