Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik C

Opgaver til besvarelse i løbet af 3 dage.

Opgavesættet skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 1. februar 1991 kl. 12 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 4. februar kl. 12, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Opgave 1

Betragt problemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0\,, \quad x \in]0,\pi[\,, \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sin^2 x\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0\,, \quad t > 0\,. \end{aligned}$$

i) Find løsningen $u(x,t)$ i den karakteristiske trekant $\{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \mid t \geq 0, t \leq \frac{x}{c}, t \leq \frac{\pi - x}{c}\}$.

ii) Skitser hvordan man finder løsningen i hele $[0,\pi] \times [0,\infty[$.

Opgave 2

Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ være sådan at $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)\,, f(\theta) = \theta$ for $\theta \in [0,\pi[$ og $f(\theta) = 0$ for $\theta \in [\pi, 2\pi[$.

i) Skitser funktionen $f(\theta)$.

ii) Find den trigonometriske Fourier række hørende til $f(\theta)$.

iii) Find Fourier rækkens sum s i punktet $\theta = \pi$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt varmelednings ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad (x,t) \in]-\pi,\pi[\times]0,\infty[\,,$$
$$u(x,0) = (\sin x)^n\,, n \in \mathbf{N}\,, \; x \in [-\pi,\pi]\,,$$
$$u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0\,, t \geq 0\,.$$

Find løsningen for ulige n.

Opgave 4

Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ være givet ved $f(x) = xe^{-x^2}$.
Find den Fourier transformerte $\hat{f}$ af f.

Opgave 5

Bestem $c_{-3}, \cdots, c_3$ således at udtrykket

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin^5\theta - \sum_{n=-3}^{3} c_n e^{in\theta}|^2 d\theta\,.$$

får den mindst mulige værdi og angiv dette værdi.