

## MATEMATIK C

Opgaver til besvarelse i 3 timer.  
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

### Opgave 1

(i) Lad funktionen  $f(x)$  være defineret for  $0 \leq x \leq \pi$  ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{for } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi(\pi - x)/2, & \text{for } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Find Fourier-cosinusrækken  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  for  $f(x)$  og Fourier-sinusrækken  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  for  $f(x)$ .

(ii) Differensen mellem de to rækker fra (i),

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + (-b_n) \sin(nx)),$$

er en (sædvanlig) Fourierrække. Summen  $g(x)$  er en  $2\pi$ -periodisk funktion på  $\mathbf{R}$ . Find  $g(x)$  for  $-\pi \leq x \leq \pi$  på lukket form. (Dette spørgsmål kan besvares uafhængigt af spørgsmål (i)).

### Opgave 2

Løs begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, & \text{for } -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t, \\ u(x, 0) = 2x^2 + x^3, & \text{for } -\infty < x < \infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -4x, & \text{for } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

for alle  $(x, t)$  med  $t \geq 0$ .

### Opgave 3

- (i) Find en funktion  $u(x, y)$  i rektanglet  $R = \{(x, y) \mid -5 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2\}$ , som løser randværdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{for } -5 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, \\ u(-5, y) = \sin(7\pi y/2), & \text{for } 0 \leq y \leq 2, \\ u(5, y) = 0, & \text{for } 0 \leq y \leq 2, \\ u(x, 0) = u(x, 2) = 0, & \text{for } -5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

- (ii) Løs randværdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u, & \text{for } -5 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, \\ u(-5, y) = \sin(\pi y/2) + \sin(7\pi y/2), & \text{for } 0 \leq y \leq 2, \\ u(5, y) = 0, & \text{for } 0 \leq y \leq 2, \\ u(x, 0) = u(x, 2) = 0, & \text{for } -5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

for ethvert  $\lambda > 0$ .

### Opgave 4

- (i) Løs følgende rand/begyndelsesværdiproblem i halvstrimmelen  $\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 3, t \geq 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2, & \text{for } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq t, \\ u(0, t) = u(3, t) = 0, & \text{for } 0 \leq t, \\ u(x, 0) = 0, & \text{for } 0 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

(Løsningen må gerne angives som en uendelig række).

- (ii) Løs følgende randværdiproblem for funktionen  $v(x)$  på intervallet  $[0, 3]$ :

$$\begin{cases} -v''(x) = x^2, & \text{for } 0 \leq x \leq 3, \\ v(0) = 0, v(3) = 0, \end{cases}$$

og find Fourier-sinusrækken (svarende til intervallet  $[0, 3]$ ) for løsningen  $v$ .

- (iii) For  $t \rightarrow \infty$  konvergerer løsningen  $u(x, t)$  fra spørgsmål (i) mod en grænsefunktion  $w(x)$  for  $0 \leq x \leq 3$ . Find  $w(x)$  på lukket form. (Man kan evt. finde  $w(x)$  som uendelig række først).