Matematik for Biologer

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 4 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen. Resultater opnået ved brug af lommeregnere kan kun indgå i besvarelsen, når det drejer sig om simple numeriske udregninger uden brug af programmering. Opgavesættet er på 2 sider.

Opgave 1

(a) Bestem en funktion $y = h(x)$, som tilfredsstiller differentialligningen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y+1},$$

og begyndelsesbetingelsen $h(1) = -3$.

(b) Angiv værdien af integralet,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx .$$

Opgave 2

Om en algepopulation i en sø skønnes, at dens størrelse den 1. januar 1999 er 10 tons. Det antages, at populationens størrelse $y(t)$, som funktion af tiden t målt i antal måneder efter denne dato, tilfredsstiller differentialligningen,

$$\frac{dy}{dt} = -2\cos(\tfrac{2\pi t}{12})\, y .$$

(a) Bestem populationens relative vækstrate den 1. juli 1999 og den 1. januar 2000.

(b) Hvilken dato er populationen størst?

(c) Giv et skøn over populationens størrelse den 19. april 2000.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Børnene i skolegården leger fangeleg. Klokken 12 er der 29 aktive drenge og 30 aktive piger, og en stor (passiv) gruppe af piger, der allerede er taget til fange. I gennemsnit bruger en aktiv dreng 2 minutter på at fange en pige, og en aktiv pige bruger 10 minutter på at fange en dreng. Til gengæld kan en aktiv pige samtidig prøve at befri en af de passive piger. Drengene satser kun på at fange pigerne. Legen kan beskrives ved følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \qquad -\tfrac{1}{10}y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{5}y. \end{aligned}$$

(a) Hvor lang tid bruger en aktiv pige, efter denne model, i gennemsnit på at befri en passiv pige?

(b) Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

(c) Bestem den løsning $(x(t), y(t))$, som for $t = 0$ svarer til de givne antal aktive børn kl. 12.

(d) På hvilket tidspunkt hører legen op?

Opgave 4

En mørk og stormfuld januaraften tager jeg mit termometer fra den varme stue (24°C) ud i kulden. Efter 1 minut viser termometret 6°C, og efter yderligere 1 minut viser det 0°C. Det antages, at temperaturen T (målt i °C), som aflæses på termometret, følger Newton's lov for afkøling.

(a) Gør rede for, at termometrets temperatur $T(t)$, som funktion af tiden t målt i minutter efter at termometret er kommet udenfor, er en funktion af formen,

$$T(t) = U + Aq^t,$$

hvor U er udetemperaturen og A og q er positive konstanter.

(b) Vis, at $A = 27$ og $q = \frac{1}{3}$, og at udetemperaturen er -3°C.

(c) Hvor mange minutter varer det, efter at jeg har bragt termometret udenfor, førend det viser korrekt, dvs viser en temperatur, der højst afviger $0{,}5$°C fra udetemperaturen?