Matematik for Biologer

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 4 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen. Resultater opnået ved brug af lommeregnere kan kun indgå i besvarelsen, når det drejer sig om simple numeriske udregninger uden brug af programmering. Opgavesættet er på 2 sider.

Opgave 1

(a) Eftervis, idet alle mellemregninger ønskes medtaget, at funktionen $y = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)$ har differentialkvotienten,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

(b) Find det bestemte integral,

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

(c) Bestem en funktion $x = f(t)$, som tilfredsstiller differentialligningen,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+x^2}\,,$$

og opfylder, at $f(0) = -\frac{3}{4}$.

Opgave 2

Om en algepopulation i en sø vides, at dens relative vækstrate er størst (og positiv) om sommeren, og mindst (og negativ) om vinteren. Det antages, at populationens størrelse $y(t)$, som funktion af tiden t målt i antal måneder efter den 1. januar 1998, tilfredsstiller differentialligningen,

$$\frac{dy}{dt} = -\cos\left(\tfrac{\pi}{6}t\right)\,y\,.$$

(a) Gør rede for, at denne antagelse ikke er i modstrid med den givne viden.

(b) Vis, at populationens størrelse er mindst om foråret og størst om efteråret.

(c) Bestem forholdet mellem populationens størrelse om efteråret og om foråret. [I beregningerne må man gerne benytte de to (grove) tilnærmelser: $\pi \approx 3$ og $e \approx 3$.]

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Børnene i skolegården leger fangeleg. Klokken 11 er der 30 aktive piger og 19 aktive drenge, og en stor (passiv) gruppe af drenge, der allerede er taget til fange. I gennemsnit bruger en aktiv pige 3 minutter på at fange en dreng, og en aktiv dreng bruger 4 minutter på at fange en pige. Til gengæld kan en aktiv dreng samtidig prøve at befri en af de passive drenge; det tager gennemsnitlig 3 minutter. Pigerne satser kun på at fange drengene.

(a) Gør rede for, at legen kan beskrives ved følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \qquad -\tfrac{1}{4}y,\\ \frac{dy}{dt} &= -\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3}y.\end{aligned}$$

(b) Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

(c) Bestem den løsning $(x(t),\, y(t))$, som for $t=0$ svarer til de givne antal aktive børn kl. 11.

(d) På hvilket tidspunkt hører legen op?

Opgave 4

Et aktivt stof modvirker hovedpine. Efter indtagelse nedbrydes det af organismen efter følgende differentialligning:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\ln 2}{12}Q,$$

hvor $Q(t)$ er mængden af stof til tidspunktet t timer efter indtagelsen.

(a) Angiv stoffets halveringstid, dvs den tid det tager, førend halvdelen af stoffet er nedbrudt.

(b) En hovedpinepille indeholder 6 mg af det aktive stof. En patient indtager en pille kl. 6, kl. 12, kl. 18, og kl. 24. Hvor meget aktivt stof indeholder patienten den næste morgen kl. 6?

(c) Antag, at den samme mængde aktivt stof i stedet var givet intravenøst over et døgn, altså med en konstant hastighed af 1 mg stof i timen. Hvor meget aktivt stof ville patienten da indeholde efter 24 timer?