Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet april 1999

Matematik for biologer

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.
Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o. lign.) er tilladt. Lommeregnere må ikke anvendes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.
Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (20%)

Find nedenstående integraler eksakt:

a) $\int \frac{1}{1+(3x-2)^2}\,dx$.

b) $\int_1^2 \ln(x^x)\,dx$.

Opgave 2 (22%)

I en sø udsættes 50 fisk, og det konstateres, at de efter 1/2 år har formeret sig til 100 fisk. Efter en årrække viser det sig, at fiskebestanden stabiliserer sig på en population på 300 fisk. Det antages at bestanden følger logistisk vækst.

a) Find en formel for fiskepopulationens størrelse til ethvert tidspunkt efter udsættelsen af de første 50 fisk.

b) Efter at bestanden har stabiliseret sig, vil myndighederne tillade fiskeri i søen. For at være helt sikre på, at bestanden ikke vil tage skade, beslutter man sig for at tillade et årligt fiskeri på halvdelen af det maksimalt opretholdelige udbytte (MSY). Hvor stor en årlig fangst vil man tillade? (Angiv nærmeste hele antal fisk).

Opgave 3 (28%)

a) Bademesteren i en svømmehal har bemærket, at kloret i bassinet fordamper eksponentielt med tiden med en halveringstid på 3 ln 2 uger. Han måler, at klormængden til tiden 0 er 4 (i en bestemt enhed), og beregner så klormængden $y(t)$ til ethvert senere tidspunkt t (målt i uger). Opstil formlen for $y(t)$.

b) For at undgå, at kloret efterhånden forsvinder, beslutter bademesteren, at han vil tilsætte en konstant mængde klor til vandet pr. tidsenhed. Argumentér for, at hvis m betegner den tilsatte mængde klor pr. tidsenhed, vil klormængden i vandet nu være beskrevet ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}y + m.$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

c) Find den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

d) Antag igen, at klormængden til tiden $t = 0$ er 4, og bestem (under forholdene beskrevet i pkt. b) den mængde klor (m), som bademesteren skal tilsætte pr. tidsenhed, for at klormængden i vandet forbliver konstant lig 4.

Opgave 4 (30%)

Lad $x(t)$ og $y(t)$ betegne antallet af to slags dyr, henholdsvis X og Y, der konkurrerer om samme føde. Antag endvidere, at dyrenes antal udvikler sig ifølge differentiallingingssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y + 12k$$

hvor sidste led i sidste ligning angiver, at der udsættes et konstant antal $12k$ af dyreart Y pr. tidsenhed.

a) Find den fuldstændige løsning til dette system af differentialligninger.

b) Antag, at der til $t = 0$ er 500 af arten X og 400 af arten Y, og antag desuden, at der ikke udsættes nogen dyr af art Y ($k = 0$ i ligningerne ovenfor). Vis, at en af arterne uddør, og bestem, den værdi af t, hvor det sker.

c) Antag som i spørgsmål b), at der til $t = 0$ er 500 af arten X og 400 af arten Y, men lad nu k være forskellig fra 0. Undersøg, om det er muligt at redde *begge* arter fra at uddø, ved at udsætte dyr af arten Y med konstant hastighed, d.v.s. ved at vælge k passende.