Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik for biologer

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.
Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere må ikke anvendes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.

Opgave 1 (20%)

Find nedenstående integraler eksakt:

a) $\int x \sin(5x^2 + 3)\, dx$.

b) $\int_0^4 x(4-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$.

Opgave 2 (25%)

En musepopulation på en fjern ø har i årevis ligget på en stabil værdi på 1000 individer, da en ulykke dræber 90% af populationen. Det observeres at bestanden 2 år efter ulykken er vokset til 500 mus. Det antages at bestanden vil reetableres iflg. logistisk vækst.

a) Find en formel for musepopulationens størrelse til ethvert tidspunkt efter ulykken.

b) Hvornår vokser musebestanden hurtigst? (Dette spørgsmål kan med fordel besvares uafhængigt af besvarelsen af spørgsmål a udelukkende ved betragtning af differentialligningen der beskriver logistisk vækst).

Opgave 3 (25%)

a) Bademesteren i en svømmehal har bemærket at kloret i bassinet fordamper eksponentielt med tiden med en halveringstid på $\frac{1}{2}\ln 2$ uger. Han måler at klormængden til tiden 0 er 2 (i en bestemt enhed) og beregner så klormængden $y(t)$ til ethvert senere tidspunkt t (målt i uger). Opstil formlen for $y(t)$.

b) For at undgå at al kloret efterhånden forsvinder beslutter bademesteren at tilsætte klor til vandet med en hastighed på e^t pr. tidsenhed. Argumentér for at klormængden $y(t)$ i vandet nu er beskrevet ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -2y + e^t.$$

c) Find den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

d) Antag igen at klormængden til tiden $t = 0$ er 2, og bestem (under forholdene beskrevet i pkt. b) klormængden i vandet efter en halv uge (altså med $t = \frac{1}{2}$) (med 2 decimaler).

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999
Matematik for biologer

Opgave 4 (30%)

I en skov lever en flok ulve og en flok hjorte. Ulvene æder hjorte. Der udvandrer ulve til de omkringliggende områder medens der indvandrer hjorte. Ud- og indvandringen aftager eksponentielt. Under passende omstændigheder leder dette til følgende model:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \quad x + y - e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y + 3e^{-t}. \end{aligned}$$

Her betegner $x(t)$ og $y(t)$ de to dyrearters populationer (målt i 1000 dyr) til tiden t, hvor t måles i en passende stor enhed.

a) Forklar ud fra koefficienterne i differentialligningssystemet hvilken af de to funktioner $x(t)$ og $y(t)$ der repræsenterer ulvebestanden.

b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

c) Antag at $x(t) = y(t) = 1$ for $t = 0$. Bestem populationernes størrelse for alle værdier af t. (Dog kun for t mindre end den værdi hvor en af populationerne uddør.)

d) Hvilken dyreart (x eller y) uddør først iflg. denne model? (*Vink:* Du behøver ikke beregne hvornår populationen uddør).