

MATEMATIK FOR BIOLOGER

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.

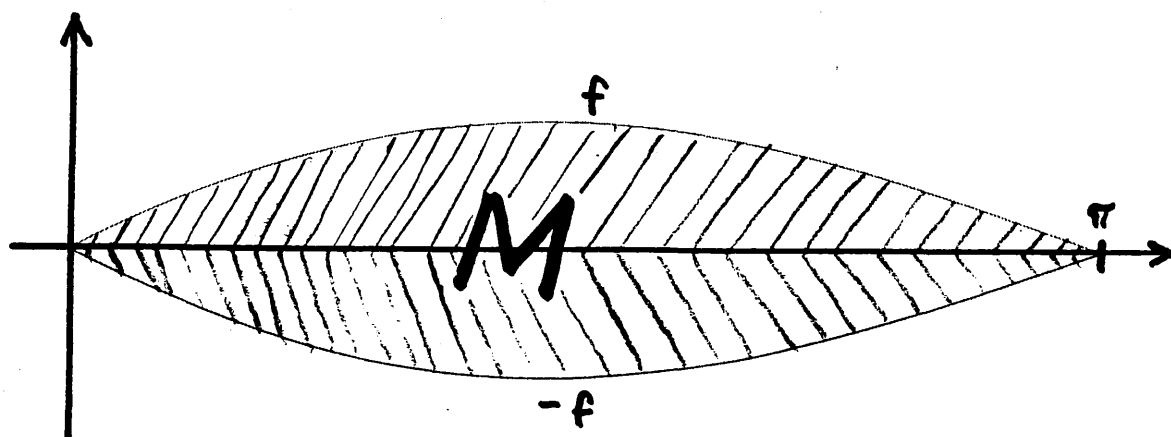
Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere må ikke anvendes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.

OPGAVE 1. (20%)

Lad f være funktionen givet ved

$$f(x) = \left(\cos \frac{x}{2}\right) \cdot \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Graferne for funktionerne f og $-f$ afgrænser en punktmængde M , som er skitseret nedenfor.



Bladene fra et tropisk træ har samme form som M , og har i passende enheder samme størrelse. Beregn arealet af et blad fra dette træ.

OPGAVE 2. (25%)

En gruppe zoologer har fundet knoglerne af en øgle, som de mener er uddød for over 3.000 år siden. Knoglefundet indeholder 74% af den mængde C^{14} (kulstof-14), som findes i levende knoglemasse. Halveringstiden for henfald af kulstof-14 er 5730 år.

- Hvor gammelt er knoglefundet?
- Hvis zoologerne havde ret, hvor meget kulstof-14 kunne knoglerne da højst indeholde (i forhold til levende knoglemasse)?

OPGAVESÆTTET FORTSÆTTES SIDE 2 ...

OPGAVE 3. (25%)

Lad $M(t)$ betegne mængden af kvælstof i Limfjorden til tiden t . I en model antages det, at fjordens organismer nedbryder kvælstof efter differentiallyigningen

$$\frac{dM}{dt} = -kM$$

hvor k er en positiv konstant. Det antages også, at tilførslen af kvælstof (pr. tidseenhed) til fjorden vokser proportionalt med tiden, så fjordens indhold af kvælstof følger differentiallyigningen

$$\frac{dM}{dt} = -kM + at,$$

hvor a er en positiv konstant. Enhederne vælges, så $M(0) = 1$. Bestem under disse antagelser et udtryk for fjordens indhold af kvælstof som funktion af tiden.

OPGAVE 4. (30%)

Vi betragter to fuglearter X og Y , som lever i samme miljø, spiser det samme og formerer sig lige godt. Imidlertid klarer fugleart Y sig bedre ved høje temperaturer, mens fugleart X ikke påvirkes af temperaturen. Under passende forudsætninger leder dette til flg. model, hvor $x(t)$ betegner antal fugle af arten X til tiden t , og $y(t)$ betegner antal fugle af arten Y til tiden t :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= y - 2x + 2 \sin t.\end{aligned}$$

Bestem den fuldstændige løsning til dette system af differentiallyigninger.