

## MATEMATIK FOR BIOLOGER

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.

Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnerne må ikke anvendes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.

### OPGAVE 1. (25%)

Højden af et bestemt træ til tiden  $t$  betegnes  $H(t)$ . Til tiden  $t = 0$  er træets højde  $H_0$ . Om træets vækst vides, at

$$\frac{dH}{dt} = kte^{-at}, \quad t \geq 0,$$

hvor  $k$  og  $a$  er positive konstanter.

a) Find en formel for træets højde til et vilkårligt tidspunkt  $t \geq 0$ .

b) Vis, at  $H(t) \rightarrow \frac{k}{a^2} + H_0$  for  $t \rightarrow \infty$ .

[Det må uden bevis anvendes, at  $e^{-at} \rightarrow 0$  og  $te^{-at} \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$ .]

### OPGAVE 2. (20%)

Den kemiske reaktion  $2NO_2 \rightarrow 2NO + O_2$  er af 2. orden, dvs. at hvis  $c(t)$  betegner koncentrationen af  $NO_2$  til tiden  $t$ , gælder

$$\frac{dc}{dt} = -c^2$$

i passende enheder. Ved et bestemt forsøg måles  $c(0) = 2$ . Find  $c(2)$ .

### OPGAVE 3. (25%)

a) Løs begyndelsesværdiproblemet

$$(*) \quad \frac{dN}{dt} = aN - H, \quad N(0) = N_0,$$

hvor  $a$ ,  $H$  og  $N_0$  er positive konstanter.

b) Til tiden  $t = 0$  udsætter en ondsindet person  $N_0$  guldfisk i en sø, hvor disse ingen naturlige fjender har. Man forsøger straks at dæmpe guldfiskenes udbredelse med en konstant fangst  $H$  (pr. tidsenhed). Hvis  $N(t)$  betegner antal guldfisk i søen til tiden  $t$ , kan væksten af  $N$  i denne situation beskrives ved (\*).

Hvor stor skal fangsten  $H$  være, hvis man vil udrydde guldfiskenene?

### OPGAVE 4. (30%)

Bestem den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^x.$$