

MATEMATIK FOR BIOLOGER

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.

Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnerne må ikke benyttes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.

OPGAVE 1. (25%)

Temperaturen i København måles gennem et døgn. Idet $T(t)$ betegner temperaturen til tiden t , viser målingerne at

$$T(t) = \frac{t}{2} \cos\left(\frac{\pi}{960} t^2\right), \quad 0 \leq t \leq 24.$$

Beregn døgnets middeltemperatur (dvs. middelværdien af $T(t)$ for $0 \leq t \leq 24$).
[Der ønskes *ikke* en tilnærmet værdi.]

OPGAVE 2. (20%)

Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x$$

som opfylder at $y = 1$ i punktet $x = 0$.

OPGAVE 3. (25%)

I en model for fiskeri betegnes størrelsen af den betragtede population til tiden t som $N(t)$. Når der ikke fiskes, gælder

$$\frac{dN}{dt} = cN(K - N)$$

hvor c og K er positive konstanter. Vi antager nu, at fangsten (som sædvanligt pr. tidsenhed) til tiden t er

$$H(t) = aN(t)^2,$$

hvor a er en positiv konstant.

- Opstil differentialligningen, som beskriver populationens vækst i denne situation, og vis, at den er logistisk.
- Gør rede for, at differentialligningen fra a) forudsiger, at populationens størrelse efter lang tid vil stabilisere sig på niveauet $\frac{cK}{c+a}$.

OPGAVESÆTTET FORTSÆTTES SIDE 2 ...

OPGAVE 4. (30%)

Et dyr er blevet angrebet af en skadelig parasit. Til tiden $t = 0$ er der 25 parasitter, og dyrets vægt er (i passende enhed) 10. Idet antal parasitter til tiden t betegnes $y(t)$, og dyrets vægt til tiden t betegnes $x(t)$, gælder

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}y + 10$$

$$\frac{dy}{dt} = 8x - 80.$$

Find et udtryk for dyrets vægt til et vilkårligt tidspunkt t .

(OPGAVESÆTTET ER SLUT)