

## MATEMATIK FOR BIOLOGER

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.

Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnerne må ikke benyttes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.

### OPGAVE 1. (20%)

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_1^e x^{-1} \sqrt{\ln x} \, dx \quad \text{og} \quad \int_1^e (\ln x)^2 \, dx.$$

### OPGAVE 2. (25%)

- a) Til tiden  $t = 0$  udsættes 10 ørreder i en sø, hvor de ikke naturligt forekommer. Ørredbestanden i søen er herefter bestemt ved, at hvis  $N(t)$  betegner antallet af ørreder til tiden  $t$ , gælder

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{500} N(1000 - N)$$

Find antallet af ørreder til tiden  $t = 10$ . [Facit kan angives eksakt eller afrundet til helt tal.]

- b) Efter at ørredbestanden har stabiliseret sig, ønsker man at påbegynde fiskeri med konstant fangst pr. tidsenhed. Find det maksimalt opretholdelige udbytte (MSY).

### OPGAVE 3. (25%)

Bestem den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = 0.$$

### OPGAVE 4. (30%)

Ved en kemisk reaktion omdannes molekylet  $X$  til et andet molekyle  $Y$  med reaktionshastigheden  $p$ . Den modsatte reaktion, hvorunder  $Y$  omdannes til  $X$ , foregår samtidig med reaktionshastigheden  $n$ . Vi har altså, at hvis  $x(t)$  og  $y(t)$  betegner mængden af hhv.  $X$  og  $Y$  til tiden  $t$ , gælder

$$x'(t) = -p x(t) + n y(t)$$

$$y'(t) = p x(t) - n y(t).$$

Lad  $x_0$  og  $y_0$  betegne mængden af hhv.  $X$  og  $Y$  til tiden  $t = 0$ . Udtryk mængden af stoffet  $X$  til tiden  $t = 1$  ved konstanterne  $p$ ,  $n$ ,  $x_0$  og  $y_0$ .