

## MATEMATIK FOR BIOLOGER

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Opgavernes vægtning er angivet i parantes.

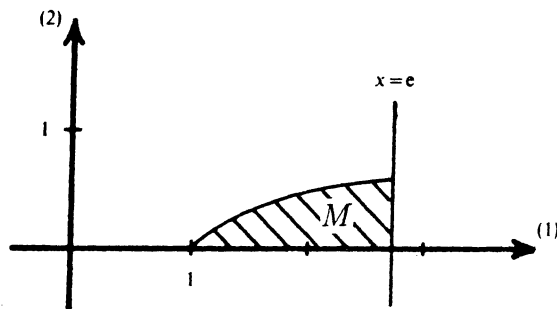
Alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere må ikke benyttes til formelmæssige eller grafiske løsninger af de stillede opgaver, men alene til simple numeriske udregninger uden brug af programmering.

### OPGAVE 1. (20%)

Lad funktionen  $f$  være givet ved

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad 1 \leq x \leq e.$$

Grafen for  $f$ , linien  $x = e$  og førsteaksen afgrænser en punktmængde  $M$ , som er skitseret nedenfor.



Bestem den eksakte værdi af arealet af  $M$ .

### OPGAVE 2. (25%)

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

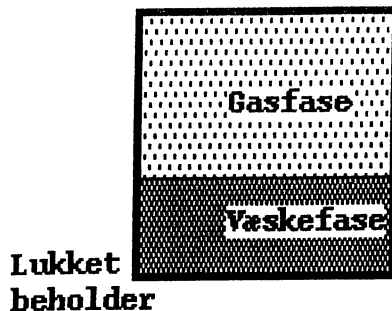
$$\frac{dy}{dx} = y - 1.$$

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1.$$

**OPGAVE 3.** (25%)

Når en væske anbringes i en lukket beholder, som den ikke helt udfylder, vil en del af væsken fordampe; efter et stykke tid bliver trykket af væskens gasfase konstant (se figur). Dette tryk kaldes væskens *damptryk*.



Damptrykket afhænger af væskens temperatur: hvis  $p$  betegner væskens damptryk, og  $T$  dens temperatur, så kan det antages, at

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p}{RT^2}, \quad T > 0$$

hvor  $R$  betegner en kendt konstant (den såkaldte gaskonstant).

For en bestemt væske gælder, i passende enheder, at damptrykket  $p = 1$  ved temperaturen  $T = 1$ .

Bestem denne væskes damptryk som funktion af temperaturen.

[NB: Ved løsning af differentiaalligningen kan man nøjes med at betragte tilfældet  $p > 0$  og  $T > 0$ .]

**OPGAVE 4.** (30%)

Bestem den løsning til differentiaalligningen

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 5 \sin x$$

som opfylder  $f(0) = \frac{1}{2}$  og  $f'(0) = 3$ .

(OPGAVESÆTTET ER SLUT)