

Matematik for biologer

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Opgavernes vægtning er angivet i parentes.

Opgave 1 (15%)

Find de bestemte integraler

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)^4 dx.$$

Opgave 2 (30%)

a) Vis, at

$$\int \frac{k}{1+e^{kt}} dt = -\ln(1+e^{-kt}) + c$$

hvor c og k er konstanter.

b) Find den løsning $y(t)$ til differentialligningen

$$y'' = (y')^2 + y' - 2$$

der opfylder $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Vink: Sæt $u = y'$.

* Opgave 3 (25%)

Undersøg monotoniforholdene for funktionen

$$f(x) = 2(\cos x + \cos^2 x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Bestem maksimums- og minimumspunkterne. (Måske får du brug for $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{4\pi}{3}$.) Tegn en skitse af grafen for f . Har grafen vendetangent i punktet $(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2})$?

Opgave 4 (30%)

Bestem den løsning $(x(t), y(t))$ til differentialligningssystemet

$$x' = 3x + 5y$$

$$y' = -x - y + 2$$

der opfylder $x(0) = 10$, $x'(0) = 5$.