

KØBENHAVNS UNIVERSITET
NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
MATEMATIK FOR BIOLOGER. Vinteren 1986/87.

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Opgaverne er stillet inden for fællesmængden af gammelt og nyt pensum.

Opg. 1 Find de bestemte integraler:

$$\int_0^{\pi/2} e^{2 \cos t} \sin t \, dt, \quad \int_1^{10} x^3 \log x \, dx$$

Opg. 2 Mange organismers vækst kan på rimelig måde beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = ay^{2/3} - by,$$

hvor y betegner organismens vægt til tiden t , og a, b er positive konstanter. Det første led repræsenterer fødeoptagelsen, som er proportional med tarmens areal og dermed med vægten i potensen $2/3$. Det andet led repræsenterer forbrændingen, som er proportional med vægten.

- Løs ovenstående differentialligning under forudsætning af, at $y(0) = 0$. Vink: Benyt substitutionen $u = y^{1/3}$.
- Find den øvre grænse for organismens vægt. Spørgsmålet kan løses uafhængigt af a).

Opg. 3 Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 1 - e^{-t},$$

som opfylder randbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Opg. 4

a) Beregn integralet

$$f(t) = \int_0^1 e^{-xt} \, dx, \quad \text{for } t > 0.$$

b) Bestem grænseværdien $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

c) Gør rede for, at funktionen f er monotont aftagende på den åbne halvlinje $]0, \infty[$.

◇