KØBENHAVNS UNIVERSITET.

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN.

MATEMATIK FOR BIOLOGER. Sommeren 1986.

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opg. 1

Ved et uheld på en atomreaktor undslipper en sky af radioaktivt iod, som forurener græsset i et landbrugsområde. Græssende køer optager det radioaktive iod, som igen udskilles gennem mælken.

(a) Find koncentrationen I af radioaktivt iod i mælken som funktion af tiden t, idet I_o betegner koncentrationen til tiden t = 0, og

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I ,$$

hvor α er en positiv konstant.

Et barn drikker K liter forurenet mælk per tidsenhed og optager herved radioaktivt iod, som bindes i skjoldbruskkirtlen.

(b) Giv en begrundelse for, at mængden R af radioaktivt iod til tiden t udgør

$$R = K I_o t e^{-\alpha t} ,$$

idet vi antager, at barnet ikke udskiller iod.

(c) Bestem den maximale værdi, som R antager, og det tidspunkt, på hvilket maximalværdien antages.

Den akkumulerede stråling, som barnet udsættes for i tidsrummet $[0, t]$, udgør

$$S = C \int_0^t R(t)\, dt ,$$

hvor C er en positiv konstant.

(d) Beregn S som en funktion af tiden.

Den øvre grænse for den strålingsdosis, som barnet udsættes for på denne måde, er

$$S_{max} = \lim_{t \to \infty} S(t)$$

(e) Beregn S_{max}.

Opg. 2

Et legeme med masse m synker ned gennem en væske under påvirkning af tyngdekraften og af den modsat rettede gnidningskraft fra væsken. Vi lader r betegne afstanden fra overfladen af væsken til legemet og antager, at $r = 0$ til tiden $t = 0$. Ifølge Newtons 2. lov er

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m G - \alpha \frac{dr}{dt} ,$$

hvor G er gravitationskonstanten og α viskositeten (G og α er positive konstanter).

(a) Beregn r som funktion af tiden, idet vi antager, at

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ til tiden } t = 0.$$

(b) Efter et stykke tid bevæger legemet sig med næsten konstant hastighed. Beregn grænsehastigheden

$$V = \lim_{t \to \infty} \frac{dr}{dt} .$$

Opg. 3

(a) Gør rede for, at funktionen

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} , \qquad x \in [0,1[,$$

hvor n er et givet naturligt tal, kan udvides til en kontinuert funktion på intervallet [0,1].

(b) Beregn integralet

$$\int_0^1 f(t)\, dt .$$

Vink: Udled og benyt identiteten

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) .$$
