KØBENHAVNS UNIVERSITET.

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN.

MATEMATIK FOR BIOLOGER. Vinteren 1985/86.

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Ved bedømmelsen vægtes alle 8 spørgsmål i de 2 opgaver ens.

Opg 1.

Lad f være den funktion, som fastlægges ved udtrykket

$$f(x) = x \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x) , \qquad 0 < x < 1.$$

Vi minder om, at logaritmefunktionen med grundtal 2 er defineret som

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} ,$$

hvor ln x betegner den naturlige logaritme.

(i) Find den afledede funktion $f'(x)$.

(ii) Find det punkt i definitionsintervallet for f, i hvilket f antager sin minimale værdi, og angiv denne.

(iii) Find det ubestemte integral

$$F(x) = \int f(x)\, dx .$$

Opg 2.

I et reservat findes der en population af rovdyr og en population af byttedyr. Vi betegner antallet af rovdyr med x og antallet af byttedyr med y og opfatter som sædvanlig x og y som reelle funktioner af tiden.

Ved rovdyrpopulationens fertilitet α forstås antallet af fødsler med efterfølgende heldigt gennemført udvikling til voksent individ per individ i populationen per tidsenhed. Tilsvarende defineres mortaliteten a som antallet af dødsfald i den voksne population per individ per tidsenhed. Hermed gælder, at

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - a x .$$

(i) Antag, at fertiliteten α og mortaliteten a er positive konstanter, og bestem i dette tilfælde x som en funktion af tiden. Kommenter resultatet.

Den i spørgsmål (i) gjorte antagelse er naturligvis ikke realistisk. Vi antager nu, at rovdyrenes formeringsevne afhænger af antallet af byttedyr (f. eks. kan vi betragte en situation, i hvilken rovdyrenes yngel udelukkende lever af byttedyrene, medens de voksne rovdyr også kan overleve på anden måde). I sådanne tilfælde kan rovdyrenes fertilitet α med rimelighed antages at være proportional med fødemængden per rovdyr. Da de voksne rovdyrs overlevelse ikke afhænger af byttedyrene, kan vi stadig betragte mortaliteten a som en positiv konstant. Hermed bliver

$$\alpha = k \frac{y}{x},$$

hvor k er en positiv konstant, og derfor

$$\frac{dx}{dt} = k y - a x .$$

(ii) Antag, at antallet af byttedyr y er en tidsuafhængig positiv konstant, og bestem under denne antagelse x som en funktion af tiden. Kommenter resultatet.

Antallet af byttedyr i reservatet kan naturligvis normalt ikke antages at være konstant. Lad os antage, at byttedyrene er planteædende, og at de indenfor reservatet kan finde al den føde, som de kan spise. Under disse forhold kan vi tilnærmet sætte

$$\frac{dy}{dt} = \beta y - b x ,$$

hvor β og b er tidsuafhængige positive konstanter. Det første bidrag på højre side hidrører fra byttedyrenes ikke af fødemangel begrænsede fertilitet, medens det andet repræsenterer rovdyrenes indgreb i bestanden. Vi har medregnet byttedyrenes naturlige mortalitet i konstanten ß.

Med henblik på at forenkle næste spørgsmål, skal vi antage at $k = 2$, $a = 6$, $ß = 1$ og $b = 5$. Tidsudviklingen af rov- og byttedyrpopulationerne styres da af differentialligningerne

$$\frac{dx}{dt} = 2y - 6x ,$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 5x .$$

Vi antager endvidere, at til tiden $t = 0$ er $x = 3$ og $y = 6$.

(iii) Bestem under disse antagelser antallet x af rovdyr og antallet y af byttedyr som funktioner af tiden.

Vink: Find y i øverste ligning. Differentier og indsæt i nederste ligning med henblik på at opnå en differentialligning af anden orden i kun en variabel. Løs derpå denne.

Under disse betingelser viser det sig, at rovdyr-populationen gradvis uddør. For at afhjælpe dette kan man udsætte byttedyr i reservatet med en konstant positiv hastighed K. Herved bliver den økologiske balance i reservatet styret af differentialligningerne

$$\frac{dx}{dt} = 2y - 6x ,$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 5x + K .$$

(iv) Bestem under disse betingelser antallet x af rovdyr og antallet y af byttedyr som funktioner af tiden, og kommenter resultatet af dette forsøg på at stabilisere rovdyrbestanden.

(v) Kan man opnå et tilsvarende resultat ved at udsætte rovdyr i reservatet med en konstant positiv hastighed?