Københavns Universitet
Matematisk Institut

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1985.

MATEMATIK FOR BIOLOGER

Opgave til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, tabeller, notater, lommeregnere m.m.) er tilladt.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler for det, kan kladden afleveres; og de dele af den, som ønskes taget i betragtning, må i så fald være afmærket tydeligt.

Der lægges vægt på, at besvarelserne angiver de benyttede regnemetoder.

Opgave 1.

Et stof udskilles gennem nyrerne. Antag, at udskillelseshastigheden $v(t)$ aftager eksponentielt. Til tiden $t=0$ minutter er udskillelseshastigheden $v(0)= 3$ mg/min. Til tiden $t=10$ minutter er $v(10)=1$ mg/min.

1) Find et udtryk for udskillelseshastigheden $v(t)$ som funktion af tiden.

2) Beregn udskillelseshastigheden til tiden $t=20$ minutter.

Et andet stof udskilles med en hastighed $V(t)$ mg/min, der for $1 \leq t \leq 10$ kan beskrives ved udtrykket

$$V(t) = \frac{1}{t} + e^{-2t} .$$

3) Find, hvor meget stof der er udskilt i tidsrummet fra $t=1$ min til $t=10$ min.

(opgaven fortsættes)

Ved løsningen kan man eventuelt benytte nogle af flg. oplysninger:

$e^{2,2} = 9{,}03$, $e^{-2,2} = 0{,}11$, $e^{-2} = 0{,}14$,

$e^{-20} = 2 \cdot 10^{-9}$, $e^{3} = 20{,}09$,

$\ln 3 = 1{,}10$, $\ln 10 = 2{,}30$, $\ln 20 = 3{,}00$.

Opgave 2.

Lad x og y betegne længden i cm af to forskellige organer i et dyr. Under dyrets vækst vokser både x og y. Følgende tabel viser sammenhørende værdier af x og y:

x	1,3	2,1	3,5	3,9	4,7	5,2
y	1,2	2,3	4,6	5,4	7	8

1) Afgør ved hjælp af enkelt og dobbeltlogaritmisk papir, om y som funktion af x er en exponentialfunktion eller en potensfunktion.

2) Bestem et tilnærmet udtryk for y(x). (D.v.s. find et skøn over konstanterne i exponential- eller potensfunktionen.)

Opgave 3.

En landmand overvejer at tilsætte et nyt kemikalium til den foderblanding, han plejer at bruge. Han sælger grisene til en fast pris til slagteriet, når de har nået en bestemt "slagtevægt". Antag, at kemikaliet koster 20 kr pr.kg. Antag endvidere, at omkostningerne pr. gris pr. måned til alt andet end det nye kemikalium (f.eks. foderblandingen, staldplads og pasning) er konstant lig med 100 kr pr.måned, uanset hvor meget kemikalium der doseres. Den tid T målt i måneder, en gris tager om at nå "slagtevægten", vil afhænge af hvor meget kemikalium x målt i kg pr.måned, der tilsættes dens foderblanding. T er altså en funktion af x. Antag, at den kan beskrives ved følgende udtryk:

$$T(x) = 0{,}01\,x^2 - 0{,}2\,x + 7.$$

(Opgaven fortsættes)

1) Find et udtryk for de samlede omkostninger, der medgår til at opfodre en gris til "slagtevægt", når der bruges x kg kemikalium pr. måned.

2) Beregn, om det kan betale sig for landmanden at bruge det nye kemikalium, og i givet fald, hvor meget han skal tilsætte pr. måned pr. gris.

Opgave 4.

En population $y(t)$ udvikler sig i overensstemmelse med den logistiske vækstmodel:

$$\frac{dy}{dt} = 1000y - 2y^2.$$

1) Find miljøets bærekapacitet.

I de sidste to spørgsmål antages det, at $y(0) = 1000$.

2) Er $y(t)$ voksende eller aftagende?

3) Find et udtryk for $y(t)$.

Opgave 5.

Find det par af løsninger $(x(t), y(t))$ til differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x+2y$$

som opfylder $x(0) = 0$, $y(0) = 4$.