Københavns Universitet
Matematisk Institut

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1984.

MATEMATIK FOR BIOLOGER.

Opgave til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, tabeller, notater, lommeregnere m.m.) er tilladt.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler for det, kan kladden afleveres; og de dele af den, som ønskes taget i betragtning, må i så fald være afmærket tydeligt.

Der lægges vægt på, at besvarelserne angiver de benyttede regnemetoder.

Opgave 1

Verdens befolkningstal vokser over kortere tidsrum tilnærmelsesvis eksponentielt.

I 1950 var tallet 2,5 milliarder, mens det i 1970 var vokset til 3,6 milliarder.

Beregn fordoblingstiden (angiv nærmeste hele antal år).

Find det forventede befolkningstal i år 2000.

Ved løsningen kan man eventuelt benytte:

$$\ln 3{,}6 = 1{,}28 \;, \quad \ln 2{,}5 = 0{,}92 \;, \quad \ln 2 = 0{,}69 \;, \quad e^{0{,}9} = 2{,}46 \;.$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

I artiklen "Catalase Photoinactivation", Science 150, diskuterer R.L. Mitchell og I.C. Anderson, hvorledes ilt og sollys kan virke nedbrydende på enzymer.

I et eksperiment måltes til forskellige tidspunkter følgende koncentrationer af et enzym, som udsattes for påvirkning af ilt og sollys.

t min	0	10	30	50	60	70	80
y µg/10 ml	121	74	30	12	6,7	3,7	2,0

Det antages, at nedbrydningen foregår eksponentielt.

Find ved hjælp af logaritmepapir et skøn over y som funktion af tiden.

Opgave 3

Når man hoster, trækker luftrøret sig sammen for derved at øge hastigheden af den udstrømmende luft.

Lad r betegne luftrørets radius i cm under et host og r_0 angive normalradien. Ved nogle forsimplende antagelser ledes man frem til, at hastigheden v i cm/sek af den udstrømmende luft teoretisk kan beskrives ved følgende udtryk:

$$v = c(r_0 - r)r^2 + v_0 \; ; \quad r_0/2 \leq r \leq r_0 \; ,$$

idet c og v_0 er konstanter.

Gennem røntgenfotografier har man konstateret, at radius under et host er ca. 2/3 af normalradien.

Vis, at den matematiske model giver maksimal hastighed ved denne radius.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1984
Matematik for biologer

Opgave 4

Find den løsning $y = f(x)$ til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 5y - 5e \ ,$$

som opfylder $f(0,2) = 0$.

Opgave 5

Find det par af løsninger $(x(t), y(t))$ til differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y \ ,$$

som opfylder $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.