Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Matematik B

Opgaver til besvarelse i 3 timer. Sættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.

Opgave 1

Lad funktionen f være givet ved

$$f(z) = e^{iz}\,, \text{ for alle } z \in \mathbb{C}.$$

1) Angiv funktionsværdien $f(1)$ både på formen re^{iw} og $a + ib$.
2) Angiv et punkt $z_0 \neq 1$ for hvilket $f(z_0) = f(1)$.
3) Angiv billedet af linien $\{\frac{\pi}{4} + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Lad C betegne enhedscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ gennemløbet i positiv omløbsretning.

4) Angiv, med begrundelser, værdierne af

$$\oint_C f(z)dz \text{ og } \oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Opgave 2

Som bekendt består gruppen S_3 af de seks elementer

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$
$$c=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

a) Gør rede for at $ab = e$.
b) Kan man heraf slutte at $ba = e$?
c) Skriv b som et produkt af cykler, og som et produkt af transpositioner.
d) Angiv, med begrundelse, ordenen af b.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad H være et uendeligdimensionalt Hilbert rum og lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for H.

1) Vis, at hvis $x \in H$ har ortonormaludviklingen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \,, \tag{$*$}$$

da er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e_n \tag{$**$}$$

konvergent i H.

2) Lad $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ for $n \in \mathbb{N}$ og vis, at der ved $(*)$ defineres en vektor $x \in H$. Beregn normen af x samt af vektoren y givet ved $(**)$.

3) Bestem projektionen af vektoren x (defineret i 2) ovenfor) på underrummet span$\{e_1, e_2, e_3\}$, samt projektionen af e_2 på (underrummet udspændt af) y.

(Ved projektionen af en vektor $z \in H$ på et afsluttet underrum $X \subseteq H$ forstås som sædvanlig den entydige vektor $u \in X$, således at $z - u \in X^{\perp}$).