Københavns Universitet
Naturvidenskabelig Kandidateksamen, Vinteren 1996-97

Matematik B

Opgaver til besvarelse i 3 timer. Sættet består af 3 opgaver.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.

Opgave 1

Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{i \sin z}{\sin(iz)}$$

i området $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(iz) \neq 0\}$.
a) Begrund, at f har en potensrækkefremstilling af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\pi)^n,$$

og bestem konvergensradius for denne række. Bestem koefficienterne c_0 og c_1.
b) Find kurveintegralet $\int_k f(z)dz$ af f langs rektanglet k med hjørnerne $1-i$, $1+4i$, $-1+4i$, $-1-i$, gennemløbet i positiv retning.

Opgave 2

Betragt funktionen

$$f(t) = \begin{cases} t/2 & 0 \leq t \leq \pi \\ t/2+\pi & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

på intervallet $]-\pi, \pi]$.
a) Udregn normen af f i Hilbertrummet $L^2([-\pi,\pi]; \frac{1}{2\pi})$.
b) Bestem Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ for f, og angiv summen af rækken for hvert $t \in [-\pi, \pi]$. Angiv ligeledes rækkens sum for $t = 2\pi$.

Opgave 3

Antag at H er et komplekst Hilbertrum, og at $\boldsymbol{e} \in H$ er en enhedsvektor. Antag endvidere at en lineær operator $S_\mu \colon H \to H$ er defineret ved

$$S_\mu(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mu\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}\rangle \boldsymbol{e},$$

hvor $\mu \in \mathbb{C}$ er en konstant.
a) Gør rede for at S_μ er begrænset
b) Vis at $\boldsymbol{e}$ er egenvektor for S_μ, og angiv egenværdien.
c) Vis at $(S_\mu)^* = S_{\bar{\mu}}$. For hvilke værdier af μ er S_μ selvadjungeret?
d) For hvilke værdier af μ er S en projektionsoperator? Angiv for disse værdier af μ det underrum G af H for hvilket $S_\mu = P_G$.
e) Lad $F \subset H$ være et afsluttet underrum om hvilket det gælder at $\boldsymbol{e} \in F$. Vis, at F reducerer S_μ for alle μ.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX