Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1984

MATEMATIK B , KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Ved besvarelsen af denne opgave er det tilladt uden videre at benytte formlen

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(px)\,dx = \frac{(-1)^p \cdot 2\pi}{p^2} \;; \qquad p \in \mathbb{N}.$$

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 \cos(2x) \;; \qquad -\pi \leq x \leq \pi .$$

Undersøg, om funktionens Fourierrække er konvergent i punktet $x = \pi$, og bestem i bekræftende fald den tilhørende sum.

Samme spørgsmål for $x \mapsto x^3 \cos 2x$

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) \;; \qquad -\pi \leq x \leq \pi ,$$

hvor α, β og γ er konstanter. Bestem de konstanter α, β og γ for hvilke g approksimerer f bedst i den forstand, at integralet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\,dx$$

er mindst mulig.

Udnyt Fourierrækken for funktionen f til at bestemme summen af den uendelige række

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+4}{(n^2-4)^2} .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

Med D betegnes distributionen givet ved

$$\langle \varphi , D \rangle = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-t^2} dt \ ; \qquad \varphi \in \mathcal{S} \ .$$

Opskriv definitionen på den afledede af en distribution, og benyt definitionen til at bestemme D' .

Udregn $\langle \varphi , D' \rangle$, hvor $\varphi(t) = e^{-t^2}$; $t \in \mathbb{R}$.

Opgave 3

Vektorerne $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ vides at udgøre et fuldstændigt ortonormalsystem i Hilbertrummet H . En operator T på H er givet ved

$$T\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi_n + \frac{1}{n+1} \varphi_{n+1} \ ; \qquad n \geq 1 \ .$$

Udregn normerne af vektorerne $T\varphi_n$ og $T^*\varphi_n$; $n \geq 1$. Er T normal ?

Vis, at såfremt λ er en egenværdi for T , så må λ være et af tallene $1, 1/2, 1/3, \cdots$.

Undersøg, om 1 er en egenværdi for T .

Opgave 4

Find fem punktgrupper, der alle kan optræde som den fuldstændige isometrigruppe for en sekskant ABCDEF , hvori AB og DE er parallelle og lige lange. Angiv i hvert af de fem tilfælde på en figur beliggenheden i forhold til sekskanten af eventuelle

(Opgaven fortsættes)

to-tals akser.

Opskriv inddelingen i konjugeretklasser for de fundne grupper, og undersøg, om nogle af grupperne er isomorfe.

Opgave 5

Anfør tre inækvivalente, irreducible repræsentationer af permutationsgruppen S_3 (samtlige matricer hørende til elementerne i S_3 skal anføres).

Bevis, at der på nær ækvivalens netop findes tre 10-dimensionale repræsentationer af S_3 med den egenskab, at alle matricer i repræsentationen svarende til permutationer forskellige fra identiteten har samme spor. Angiv de tre repræsentationer ved at anføre, hvorledes de, på nær ækvivalens, kan skrives som en direkte sum af irreducible repræsentationer.