Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1984

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Ved besvarelsen af denne opgave er det tilladt uden videre at benytte formlen

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(px)\,dx = \frac{(-1)^p \cdot 2\pi}{p^2} \; ; \quad p \in \mathbb{N} .$$

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 \cos(2x) \; ; \quad -\pi \leq x \leq \pi .$$

Undersøg, om funktionens Fourierrække er konvergent i punktet $x = \pi$, og bestem i bekræftende fald den tilhørende sum.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) \; ; \quad -\pi \leq x \leq \pi ,$$

hvor α, β og γ er konstanter. Bestem de konstanter α, β og γ for hvilke g approksimerer f bedst i den forstand, at integralet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\,dx$$

er mindst mulig.

(Opgaven fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1984
Matematik B, fysik-geofysik-opgivelser

Udnyt Fourierrækken for funktionen f til at bestemme summen af den uendelige række

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+4}{(n^2-4)^2} .$$

Opgave 2

Med D betegnes distributionen givet ved

$$\langle \varphi , D \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-t^2} dt ; \qquad \varphi \in \mathcal{S} .$$

Opskriv definitionen på den afledede af en distribution, og benyt definitionen til at bestemme D'.

Udregn $\langle \varphi , D' \rangle$, hvor $\varphi(t) = e^{-t^2}$; $t \in \mathbb{R}$.

Opgave 3

Vektorerne $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ vides at udgøre et fuldstændigt ortonormalsystem i Hilbertrummet H. En operator T på H er givet ved

$$T\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi_n + \frac{1}{n+1} \varphi_{n+1} ; \quad n \geq 1 .$$

Udregn normerne af vektorerne $T\varphi_n$ og $T^*\varphi_n$; $n \geq 1$. Er T normal ?

Vis, at såfremt λ er en egenværdi for T, så må λ være et af tallene $1, 1/2, 1/3, \cdots$.

Undersøg, om 1 er en egenværdi for T.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 4

En handelsrejsende bor i O-købing og foretager hvert år 50 rundrejser til de fire byer 1-købing, 2-købing, 3-købing og 4-købing, der er beliggende i et rektangel, hvis sider har længderne 80 og 60 km. Hjembyen O-købing ligger i rektanglets centrum. Alle byer er forbundne med lige veje. Den handelsrejsende har hidtil kørt rundturen 012340 (som er kortest mulig), men overvejer nu, om han næste år vil bryde monotonien.

Den plan, den handelsrejsende overvejer at sætte i værk, går ud på at vælge hver enkelt af årets 50 rundrejser tilfældigt blandt samtlige mulige rundrejser således, at alle mulige rundrejser bliver lige sandsynlige. Desuden vil han vælge rundrejserne uafhængigt af hinanden.

Ved en rundrejse forstås en rejse, der starter og ender i den handelsrejsendes hjemby, hvorunder byerne 1, 2, 3 og 4-købing besøges netop én gang og således, at ruten fra en by til den næste foregår ad den kortest mulige vej.

Før den handelsrejsende beslutter sig, ønsker han følgende spørgsmål besvaret:

Hvor mange forskellige rundrejser findes der ?

Hvor stor er middellængden af en rundrejse ?

Hvor stor er sandsynligheden for, at en rundrejse er "gunstig", dvs. ikke indebærer, at en vejstrækning skal passeres to gange ?

Lad S angive antallet af "gunstige" rundrejser blandt de 50 planlagte rundrejser. Hvorledes kan man vælge naturlige tal a og b $(1\leq a<b\leq 50)$ således, at der er (omtrent) 95% sandsynlighed for, at $a\leq S<b$?

Besvar disse spørgsmål.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 5

Der foreligger følgende to stikprøver, begge af størrelse 5:

I:	2,25	3,30	2,02	2,83	2,47
II:	3,15	2,05	2,55	2,87	2,93 .

Begge stikprøver er frembragt ved simulation på en sådan måde, at den ene tilhører den normerede normalfordelings positive type, mens den anden tilhører den positive type for eksponentialfordelingen med parameter 1 .

Afgør ud fra passende fraktildiagrammer, hvilken stikprøve der (rimeligvis) hører til hvilken type og udnyt fraktildiagrammerne til at give (grove) estimater af de tilhørende positions- og skalaparametre.

Obs. Graferne på næste side kan evt. udnyttes ved konstruktion af fraktildiagrammerne. Endvidere kan man ved henvendelse til opsynet få uddelt millimeterpapir.