Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1983/84

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Et lineært tidsinvariant filter har forstærkningen H givet ved

$$H(\omega) = i\omega\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\omega^2/2} - \frac{4}{4+(\omega-1)^2} \quad ; \qquad \omega \in \mathbb{R} .$$

Bestem karakteristikken.

Opgave 2

I denne opgave betegner L^2 Hilbertrummet af funktioner definerede på $\mathbb{R}$, for hvilke normkvadratet

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, e^{-t^2} dt$$

er endeligt.

Lad P betegne projektionsoperatoren på underrummet af de funktioner x i L^2, der antager værdien 0 for $t < 0$.

Idet T betegner operatoren defineret ved $Tx = y$ med y givet ved

$$y(t) = \begin{cases} 5\,x(t) & \text{for} \quad t < 0 \\ x(t) & \text{for} \quad t \geq 0 , \end{cases}$$

skal man udtrykke T som en funktion af P.

Find $\sigma(T)$.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1983/84

Matematik B, Kemi-opgivelser

Opgave 3

Hilbertrummet H har den fuldstændige ortonormalbasis $(\varphi_n)_{n=1,2,\ldots}$.

En operator T på H er givet ved at det for $n \geq 1$ og $m \geq 1$ gælder, at

$$\langle T\varphi_m, \varphi_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \leq 4,\ m \leq 4 \text{ og } n+m \text{ er lige} \\ 1 & \text{hvis } n \leq 4,\ m \leq 4 \text{ og } n+m \text{ er ulige} \\ 0 & \text{hvis } n > 4 \text{ og } n \neq m \\ 0 & \text{hvis } m > 4 \text{ og } n \neq m \\ 1 & \text{hvis } n > 4 \text{ og } n = m\,. \end{cases}$$

Bestem den matrix $\underline{\underline{T}}$ der repræsenterer T m.h.t. $(\varphi_n)_{n\geq 1}$.

Er T selvadjungeret ? Er T unitær ?

Bestem en fuldstændig ortonormalbasis bestående af egenvektorer for T.

Opgave 4

Gruppen $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ har følgende kompositionstabel

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	3	1	5	6	4	8	9	7	11	12	10
3	3	1	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11
4	4	5	6	1	2	3	10	11	12	7	8	9
5	5	6	4	2	3	1	11	12	10	8	9	7
6	6	4	5	3	1	2	12	10	11	9	7	8
7	7	9	8	10	12	11	1	3	2	4	6	5
8	8	7	9	11	10	12	2	1	3	5	4	6
9	9	8	7	12	11	10	3	2	1	6	5	4
10	10	12	11	7	9	8	4	6	5	1	3	2
11	11	10	12	8	7	9	5	4	6	2	1	3
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

opgaven fortsættes

(opgave 4 fortsat)

Nedenstående punkter ønskes diskuteret direkte på basis af kompositionstabellen:

(a) Bestem elementernes orden, gruppens centrum samt opdelingen i konjugeretklasser.

(b) Find samtlige ikke-trivielle invariante undergrupper, som indeholder gruppeelementet 3. Undersøg, hvilke blandt disse der er cykliske, og vis, at de resterende er indbyrdes isomorfe.

(c) Er G isomorf med $D_3 \times C_2$? Angiv en konkret rumlig konfiguration, hvis fuldstændige isometrigruppe er isomorf med G .

(d) Bestem gruppens karaktertabel. De principper, der anvendes, skal klart fremgå af besvarelsen, og kendskab til konkrete gruppers karaktertabeller må ikke udnyttes.

Opgave 5

Nedenstående tabel viser to repræsentationer D' og D'' af diedergruppen D_3 , idet dog ikke alle matricer er anført. Bestem de manglende matricer. Vis, at en af

D_3	E	C_3	$C_3^{\,2}$	C_{2a}	C_{2b}	C_{2c}
D'		$\begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$
D''			$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix}$	

repræsentationerne er reducibel og bestem repræsentationer, der har en direkte sum, som er ækvivalent med den omtalte reducible repræsentation.