Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1983/84

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Et lineært tidsinvariant filter har forstærkningen H givet ved

$$H(\omega) = i\omega\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\omega^2/2} - \frac{4}{4+(\omega-1)^2} \quad ; \qquad \omega \in \mathbb{R} .$$

Bestem karakteristikken.

Opgave 2

I denne opgave betegner L^2 Hilbertrummet af funktioner definerede på $\mathbb{R}$, for hvilke normkvadratet

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt$$

er endeligt.

Lad P betegne projektionsoperatoren på underrummet af de funktioner x i L^2, der antager værdien 0 for $t < 0$.

Idet T betegner operatoren defineret ved $Tx = y$ med y givet ved

$$y(t) = \begin{cases} 5\, x(t) & \text{for} \quad t < 0 \\ x(t) & \text{for} \quad t \geq 0 , \end{cases}$$

skal man udtrykke T som en funktion af P.

Find $\sigma(T)$.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3

Hilbertrummet H har den fuldstændige ortonormalbasis $(\varphi_n)_{n=1,2,\dots}$.

En operator T på H er givet ved at det for $n \geq 1$ og $m \geq 1$ gælder, at

$$\langle T\varphi_m, \varphi_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \leq 4,\ m \leq 4 \text{ og } n+m \text{ er lige} \\ 1 & \text{hvis } n \leq 4,\ m \leq 4 \text{ og } n+m \text{ er ulige} \\ 0 & \text{hvis } n > 4 \text{ og } n \neq m \\ 0 & \text{hvis } m > 4 \text{ og } n \neq m \\ 1 & \text{hvis } n > 4 \text{ og } n = m\,. \end{cases}$$

Bestem den matrix $\underline{\underline{T}}$ der repræsenterer T m.h.t. $(\varphi_n)_{n\geq 1}$.

Er T selvadjungeret ? Er T unitær ?

Bestem en fuldstændig ortonormalbasis bestående af egenvektorer for T.

Opgave 4

Et punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vælges tilfældigt på følgende måde: Først vælges $r \geq 0$ tilfældigt efter fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(r) = 2re^{-r^2} \quad ; \quad 0 \leq r < \infty\,.$$

Dernæst vælges $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ tilfældigt efter ligefordelingen over $[0,\frac{\pi}{2}]$ og uafhængigt af r. Endelig sættes $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Bevis, at x og y opfattet som stokastiske variable er uafhængige identisk fordelte med samme fordeling som den numeriske værdi af en passende normalfordelt stokastisk variabel. [Ved løsningen kan man få brug for differentialkvotienten af Arctg t, som er $(1+t^2)^{-1}$].

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1983/84
Matematik B, Fysik-Geofysik-opgivelser

Opgave 5

Lad x_1, x_2 være en stikprøve fra en Poissonfordeling med parameter λ. Betragt det test, for hvilket forkastelsesområdet består af punkterne

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (0,2), \quad (1,0), \quad (1,1), \quad (2,0) .$$

Testet benyttes til at teste nulhypotesen $\lambda = 0,5$ mod den alternative hypotese $\lambda = 2$.
Beregn niveau og styrke for dette test og undersøg, om det er et bedste test.