Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1983

MATEMATIK B

FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Udnyt Laplacetransformationen til at bestemme en funktion $x = x(t)$ defineret for $t \geq 0$ såeldes, at det for alle $t > 0$ gælder, at

$$x'(t) = \frac{5}{2}x(t) - \int_0^t x(\tau)d\tau,$$

og således, at

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{e^{2t}} = 4.$$

Opgave 2

I denne opgave betegner L^2 Hilbertrummet af funktioner definerede på $[0,\infty[$, for hvilke normkvadratet

$$\|x\|^2 = \int_0^\infty |x(t)|^2 dt$$

er endeligt. For $n = 0,1,2,\ldots$ betegner φ_n funktionen

$$\varphi_n(t) = t^n e^{-t} \quad ; \quad t \geq 0.$$

Desuden betegner x_0 funktionen givet ved

$$x_0(t) = e^{-2t} \quad ; \quad t \geq 0.$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

I det følgende er det tilladt uden bevis at benytte formlen

$$\int_0^\infty t^k e^{-\alpha t} dt = \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad \alpha > 0.$$

Gør rede for, at x_0 og alle funktionerne φ_n; $n = 0,1,2,\ldots$ ligger i Hilbertrummet L^2. Bestem samtlige indre produkter

$$\langle x_0, \varphi_n \rangle \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

og

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad m = 0,1,2,\ldots \; .$$

Gør rede for, at der findes entydigt bestemte konstanter α_0, β_0 og γ_0 således, at det for ethvert andet sæt af konstanter α, β og γ gælder, at $\|x_0 - y_0\| < \|x_0 - y\|$, hvor y_0 og y betegner funktionerne

$$y_0(t) = (\alpha_0 + \beta_0 t + \gamma_0 t^2) e^{-t} \quad ; \quad t \geq 0,$$
$$y(t) = (\alpha + \beta t + \gamma t^2) e^{-t} \quad ; \quad t \geq 0.$$

Vis, at α_0, β_0 og γ_0 er entydigt bestemt ved ligningssystemet

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{4}\beta_0 + \frac{1}{4}\gamma_0 = \frac{1}{3} \; ,$$
$$\frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\beta_0 + \frac{3}{8}\gamma_0 = \frac{1}{9} \; ,$$
$$\frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{3}{8}\beta_0 + \frac{3}{4}\gamma_0 = \frac{2}{27} \; .$$

Bestem α_0, β_0 og γ_0 .

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1983
Matematik B, fysik-geofysik-opgivelser

Opgave 3

I denne opgave betegner L^2 samme Hilbertrum som i opgave 2.

Med T betegnes afbildningen af L^2 ind i sig selv, som til enhver funktion $x \in L^2$ lader svare funktionen y givet ved

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t \leq 1, \\ x(t) & \text{for } 1 < t . \end{cases}$$

Gør rede for, at T er en begrænset lineær operator, og bestem dens norm.

Er T selvadjungeret? Er T unitær? Er T idempotent?

Find $\sigma_p(T)$.

Vis, at der for enhver funktion $y \in L^2$ findes en entydigt bestemt funktion $x \in L^2$ således, at $Tx-2x = y$; bestem denne funktion x.

Opgave 4

De n stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ opfylder ulighederne $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n$. Den simultane tæthedsfunktion for $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-x_n} \; ; \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n .$$

Er X'erne uafhængige?

Definer nye stokastiske variable $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ved

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2 - X_1, \quad Y_3 = X_3 - X_2, \ldots, Y_n = X_n - X_{n-1} .$$

Bestem den simultane fordeling for $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Er Y'erne uafhængige?

Bestem de marginale fordelinger hørende til $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 5

For enhver værdi af parametersættet (t,α), som tilhører mængden

$$\Theta = \{(t,\alpha) \mid t > 0,\ \alpha > 0\},$$

betragtes funktionen $f(x|t,\alpha)$ givet ved

$$f(x|t,\alpha) = \begin{cases} \alpha \cdot t^{-\alpha} x^{\alpha-1} & \text{for } 0 < x \leq t, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Eftervis, at for alle $(t,\alpha) \in \Theta$ er $f(x|t,\alpha)$ en tæthedsfunktion.

Der foreligger følgende stikprøve af størrelse 5 fra $(f(x|t,\alpha))_{(t,\alpha) \in \Theta}$:

$$2, \quad 0.3, \quad 0.7, \quad 10, \quad 5.$$

Hvilken værdi har likelihoodfunktionen $L(t,\alpha)$ i et punkt $(t,\alpha) \in \Theta$ med $t < 10$?

Bestem et fuldstændigt udtryk for likelihoodfunktionen.

Bestem maksimum-likelihoodestimatoren af (t,α).

Vejledning: Man kan f.eks. først løse den simplere opgave at bestemme maksimum-likelihoodestimatoren for t under forudsætning af, at α har en fast, kendt værdi.