Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1982/83

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Ved bedømmelsen tæller opgave 4 dobbelt

Opgave 1

Funktionen

$$\frac{4}{4+\omega^2} - i(\omega-1)\sqrt{2\pi}e^{-(\omega-1)^2/2} \quad ; \quad \omega \in \mathbb{R}$$

er den Fouriertransformerede af en distribution. Bestem denne.

Opgave 2

Operatoren T på $\mathbb{C}^2$ repræsenteres m.h.t. den kanoniske basis ved matricen

$$\begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{Bmatrix} .$$

Idet funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vides at opfylde kravene $f(2) = 0$ og $f(-1/2) = 1$, skal man bestemme den matrix, der repræsenterer operatoren $f(T)$ m.h.t. den kanoniske basis.

Er $f(T)$ selvadjungeret? Er $f(T)$ unitær?

Bevis, at

$$f(T) = 2T^4 - 3T^3 - 2T^2 - \frac{2}{5}T + \frac{4}{5}I .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3

I et Hilbertrum udgør $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ en fuldstændig ortonormalbasis. Operatoren T repræsenteret m.h.t. denne basis ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/3 & & 1/3 & & \\ 1/4 & & & 1/4 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(på de ikke udfyldte pladser skal der være 0'er; tal forskellige fra 0 forekommer altså kun i 1'te søjle og i hoveddiagonalen).

Bestem punktspektret for T.

Opgave 4

Ved af afskære hjørnerne i en terning på passende vis fremkommer et polyeder P, der består af 6 regulære 8-kanter og af 8 regulære 3-kanter (jvf. den under eksaminationen udleverede model).

Med G betegnes den egentlige isometrigruppe for P. Bestem G og angiv inddelingen af G i konjugeretklasser.

Findes der i G et element forskellig fra gruppens ét-element som kommuterer med ethvert element i G?

Lad A være en af 8-kanterne og B en af 3-kanterne i P. Bestem undergruppen G' af alle isometrier, der lader A invariant og bestem undergruppen G'' af alle isometrier, der lader B invariant. Undersøg, om G' og G'' er invariante undergrupper.

opgaven fortsættes

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1983
Matematik B, kemi-opgivelser

(opgave 4 fortsat)

Vælg en passende ortonormalbasis i rummet og lad D betegne den repræsentation af G, der er givet ved at matricen $\underline{\underline{D}}(\varphi)$, for $\varphi \in G$, repræsenterer φ med hensyn til den valgte basis. Vælg for enhver konjugeretklasse K i G et element $\varphi \in K$ og bestem $\underline{\underline{D}}(\varphi)$. Undersøg, om D er irreducibel.