

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpe midler er tilladt.

Opgave nr. 1

Funktionerne f og g er definerede på intervallet $[-\pi, \pi]$. De er givet ved

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right), \quad g(t) = \sin(2t),$$

hvor $t \in [-\pi, \pi]$.

For hver af funktionerne skal man med anførelse af de nødvendige udregninger bestemme den tilhørende Fourierrække og desuden undersøge, hvad man får ud af at anvende Parseval's ligning.

Opgave nr. 2

I denne opgave betegner ℓ^2 Hilbertrummet af dobbelt-uedelige følger $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ med $\|x\|^2 < \infty$, hvor $\|x\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2$. For hvert $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ betegner φ_n den n 'te basisvektor i den kanoniske basis for ℓ^2 .

En operator T på ℓ^2 er givet ved ligningerne

$$T\varphi_n = \varphi_n + \varphi_{-n}; \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Undersøg, om T er selvadjungeret eller unitær.

(Opgaven fortsættes)

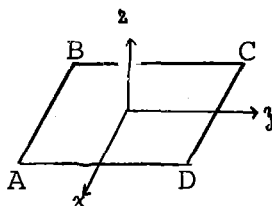
Find punktspektret for T .

Vis, at ethvert komplekst tal λ , som ikke ligger i punktspektret, er et regulært punkt for T .

Udtryk for $\lambda \notin \sigma(T)$ operatoren $(T-\lambda I)^{-1}$ på simpel vis ved hjælp af operatoren T selv og identiteten I .

Opgave nr. 3*)

I denne opgave betegner G diedergruppen D_4 . Idet der henvises til figuren, hvor $ABCD$ forestiller et kvadrat i xy -planen, består



G af elementerne E , C_{4z}^1 , C_{4z}^2 , C_{4z}^3 , C_{2x} , C_{2y} , C_{2AC} og C_{2BD} (dette kræves ikke vist). Elementerne betegnes med tallene fra 1 til 8 således, at E kaldes 1, C_{4z}^1 kaldes 2 o.s.v. indtil C_{2BD} , der kaldes 8. Vi tillader en lidt løs notation; f.eks. skriver vi $2 \cdot 3 = 4$ i stedet for $C_{4z}^1 \cdot C_{4z}^2 = C_{4z}^3$.

Bestem for ethvert gruppeelement det inverse til elementet samt elementets orden.

Vis, at G indeholder en undergruppe, der er isomorf med den cykliske gruppe C_4 , og at G indeholder to undergrupper, der begge er isomorfe med Klein's firergruppe.

*)

Ved bedømmelsen tæller denne opgave dobbelt. Bemærk, at mange af spørgsmålene kan besvares uden at man først har besvaret de foregående spørgsmål. Der kræves en selvstændig argumentation for hvert enkelt spørgsmål (det er ikke nok at henvise til gennemarbejdede eksempler fra noterne).

(Opgaven fortsættes)

